Curso de Nivelación Matemáticas

Universidad de Los Andes

Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
FACES-ULA
DECANATO

Luis García
lgarcia@ula.ve
0416-9742161
Coordinador

1. Introducción

El presente material es el producto de varias discusiones realizadas con algunos profesores de matemáticas de nuestra facultad, sumadas a las respuestas de una gruesa cantidad de estudiantes que, en sus exámenes de los dos primeros semestres, muestran de forma precisa muchas debilidades y falencias en materia de los fundamentos matemáticos que, por alguna razón, fueron obviadas en sus estudios previos a la universidad. Resultaría muy fácil buscar responsables de esta problemática, pero no está en el ánimo del autor ni mucho menos es el objetivo de este trabajo. Por el contrario, el objetivo del mismo consiste en ofrecerle a los estudiantes que ingresan a nuestra FACES-ULA un espacio y un material que les permita corregir en corto tiempo estas debilidades cognitivas. En tal sentido, el presente trabajo está estructurado de manera que el estudiante haga un breve recorrido por las distintas operaciones aritméticas y algebraicas que se necesitan para iniciar un curso de primer semestre de nuestra facultad y, finalizamos con una introducción a la resolución de problemas algebraicos, donde haces hincapié en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico, planteando el problema ha estudiar y la resolución del mismo. En este último apartado resolvemos una serie de problemas *modelos* para orientar al lector y dejamos otros para su resolución.

Un punto importante que debe ser tomado en cuenta es que este material se aborda tomando en cuenta que el lector tiene unos conocimientos básicos y, en todo caso, el facilitador del curso juega un papel crucial sobre cada uno de los puntos que trabajamos en este curso.

2. Aritmética de Números Enteros

En la aritmética elemental conocemos cuatro operaciones básicas, estas son: la suma, llamada también adición, la resta o sustracción, la multiplicación y la división. En esta parte hablaremos concretamente de la suma y la resta con números enteros; para tal fin, recordemos primeramente cuál es el conjunto de los números enteros.

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Como dato ha ser recordado, los números enteros ubicados a la izquierda del cero se llaman números enteros negativos y se les antepone el signo $(-)$ y los números enteros ubicados a la derecha del cero se llaman números enteros positivos y no hace falta colocarles el signo $(+)$.

2.1. Suma y resta con números enteros

A continuación escribimos algunas reglas que facilitan estas dos operaciones.

Regla S1: Para sumar dos números enteros del mismo signo, se conserva el signo y se suman los valores:

Ejemplo 1. *:*

1. *5 + 4 = 9*
2. *(-3) + (-4) = -7*
3. *13 + 8 = 21*
4. *(-6) + (-5) = -11*

Regla S2: Para sumar dos números enteros de signos contrarios, se coloca el signo del número de mayor valor y se resta el número mayor menos el número menor.

Ejemplo 2. *:*

1. *9 + (-5) = 4*
2. *(-12) + 7 = -5*
3. *6 + (-17) = -11*
4. *(-23) + 40 = 17*

Ejercicios 1. *: Realiza las siguientes operaciones haciendo uso de las reglas **S1** y **S2**.*

$1)5+8=$	$2)9+3=$	$3)17+(-6)=$
$4)45+(-32)=$	$5)4+(-26)=$	$6)(-48)+12=$
$7)(-15)+61=$	$8)(-23)+44=$	$9)14+(-19)=$
$10)(-15)+48=$	$11)(-72)+(-11)=$	$12)(-32)+(-32)=$
$13)(-17)+17=$	$14)19+(-6)=$	$15)26+63=$

Regla S3: Para sumar tres o más números enteros de distintos signos, se suman todos los números de un mismo signo, de esta manera quedan al final una suma de números enteros de signos contrarios y se aplica la regla **S2**.

Ejemplo 3. *:*

1. $9 + 5 + 34 + 73 = 121$
2. $(-12) + (-7) + (-16) + (-29) = -64$
3. $6 + (-17) + 39 + (-24) = 45 + (-41) = 4$
4. $-23 + 40 + (-98) + 43 = 83 + (-121) = -38$
5. $25 + 37 + (-82) + 71 + (-63) = 133 + (-146) = -13$
6. $(-38) + 27 + (-12) + (-61) + 80 + 215 = 242 + (-111) = 131$

En el caso de la resta de dos números enteros, podemos convertirla en una suma mediante las siguientes reglas.

Regla R1: Para restar dos números enteros del mismo signo, el signo de resta le cambia el signo al segundo número y colocamos el símbolo de suma entre ambos números.

Ejemplo 4. *:*

1. *5 - 4 = 5 + (-4) = 1*
2. *(-12) - (-15) = -12 + 15 = 3*
3. *(-17) - (-2) = -17 + 2 = -15*
4. *25 - (-40) = 25 + 32 = 57*
5. *25 - 37 = 25 + (-37) = -12*

Regla R2: Para restar dos números enteros de signo contrario, igual que en la regla **R1**, le cambiamos el signo al segundo número y colocamos el símbolo de la suma entre ambos números.

Ejemplo 5. *:*

1. *(-17) - (9) = -17 - 9 = -26*

2. *12 - (-11) = 12 + 11 = 23*

3. *26 - (-38) = 26 + 38 = 64*

4. *(-16) - (25) = -16 + (-25) = -41*

Ejercicios 2. *: Resuelva los siguientes ejercicios haciendo uso de las reglas* ***S1****,* ***S2****,* ***S3****,* ***R1*** *y* ***R2****, expuestas anteriormente.*

$1) 3-4=$	$2) 4-5=$	$3) 3-8=$
$4) 7-2=$	$5) 6-1-1=$	$6) 3-1-1=$
$7) 5+1-1=$	$8) 3+1-1=$	$9) 3-1-3=$
$10) 8-1-3=$	$11) 9-3-8=$	$12) 2-7+4=$
$13) 1+8-7=$	$14) 7-7+15=$	$15) 3+1-7=$
$16) 1+6-5=$	$17) 4-3+1=$	$18) 1+3-2=$
$19) -1-1-1=$	$20) 2-5+1=$	$21) 3-3-4=$
$22) 6-2-2=$	$23) 7-2-3=$	$24) 7-6-4=$
$25) 3-4+5=$	$26) 6-7+2=$	$27) 6+4-8=$
$28) 4+2-5=$	$29) 6+2-6=$	$30) 7+3-6=$
$31) 5+2-8=$	$32) 3+6-4=$	$33) -3+5-2+1=$

2.2. Operaciones aritméticas sin signos de agrupación

Dentro de las operaciones aritméticas existe una jerarquía o prioridad cuando tenemos varias operaciones combinadas sin signos de agrupación (paréntesis, llaves o corchetes). ¿Qué significa esto? Que debemos tener presente el orden con el cual debemos proceder en nuestras operaciones.

Por ejemplo, no obtendremos el mismo resultado si primero sumamos y luego multiplicamos, que si primero multiplicamos y luego restamos. Esta jerarquía o prioridad consiste en lo siguiente: Dado un conjunto de operaciones combinadas, **se resuelven primero las multiplicaciones y divisiones y, en segundo lugar, las sumas y restas**.

Ejemplo 6. *:*

$$\mathbf{1})\quad 5+\underbrace{9\cdot 8}-\underbrace{15:5}-12+13-6 \;=\; 5+72-3-12+13-6$$
$$= 90-21$$
$$= 69$$

$$\mathbf{2})\quad -12+\underbrace{35:7}+6+\underbrace{28\cdot 3}-\underbrace{25\cdot 6}-15+10 \;=\; -12+5+6+84-150-15+10$$
$$= 105-177$$
$$= -72$$

$$\mathbf{3})\quad -37-\underbrace{49:7}-18-\underbrace{17\cdot 3}-\underbrace{25\cdot 6}+13 \;=\; -37-7-18-51-150+13$$
$$= 13-263$$
$$= -250$$

$$\mathbf{4})\quad 55+\underbrace{51:3}+19+\underbrace{28\cdot 3}-\underbrace{25\cdot 6}+215 \;=\; 55+17+19+84-150+215$$
$$= 390-215$$
$$= 175$$

$$\mathbf{5})\quad 47-\underbrace{210:6}+37+\underbrace{33\cdot 5}-\underbrace{32\cdot 5}-320 \;=\; 47-35+37+165-160-320$$
$$= 249-515$$
$$= -266$$

Ejercicios 3. *Resuelva los siguientes ejercicios con operaciones combinadas haciendo uso de las* jerarquías de las operaciones.

1) $5+3-2\cdot 2=$	2) $3+5\cdot 7-3=$
3) $4+2\cdot 3+2-4-1=$	4) $2\cdot 15-2-11-7-3=$
5) $4:2-1=$	6) $2-3\cdot 3\cdot 8=$
7) $4\cdot 14-120:12=$	8) $3\cdot 12+14:7=$
9) $15:3+35:7=$	10) $5+4\cdot 5=$
11) $3\cdot 15-45=$	12) $3\cdot 24:2+3-25=$
13) $3\cdot 12+14=$	14) $5\cdot 4+3\cdot 3=$
15) $45:5-45:9=$	16) $20:4-34-4\cdot 9=$
17) $5\cdot 5=$	18) $2+45:3\cdot 5=$

2.3. Operaciones aritméticas con signos de agrupación

Cuando tenemos operaciones combinadas con signos de agrupación, tales como paréntesis, $()$, llaves, $\{\}$, o corchetes, $[]$, debemos resolver primero las operaciones que se encuentran dentro de los signos de agrupación y luego procedemos según la jerarquía de las operaciones aritméticas mencionada anteriormente.

En el caso de signos de agrupaciones encajados en otros, primero se resuelven las operaciones de los signos de agrupación más internos hacia los externos.

Ejemplo 7. *:*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1)}\quad 5+(-50+9\cdot 8)-(16-15:5)-12+13-6 &= 5+\mathbf{22}-(\boldsymbol{13})-12+13-6\\
&= 5+22-13-12+13-6\\
&= 40-31\\
&= 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{2})\ \ 16+(8+7-30)\cdot 4-(7-2\cdot 8) &= 16+(\boldsymbol{-15})\cdot 4-(\boldsymbol{-9})\\
&= 16-15\cdot 4+9\\
&= 16-60+9\\
&= 25-60\\
&= -35
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{3})\ \ 17-(14+1)+22-[20+(7-5)2]:4 &= 17-\boldsymbol{15}+22-[20+\mathbf{2}\cdot 2]:4\\
&= 17-15+22-\boldsymbol{24}:4\\
&= 17-15+22-6\\
&= 39-21\\
&= 8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{4})\ \ (-4+25+10+4):5-(-26+22):4\cdot 21 &= \boldsymbol{35}:5-(\boldsymbol{-4}):4\\
&= 7+4:4\\
&= 7+1\\
&= 8
\end{aligned}
$$

Ejercicios 4. *Resuelva los siguientes ejercicios, los cuales contienen las cuatro operaciones aritméticas y signos de agrupación. En tales casos se debe respetar la jerarquía entre las operaciones o los signos de agrupación en las situaciones que correspondan.*

$1)2[18+3(13-9)-5]=$	$2)10-[6-(5-4)-2]+1=$
$3)64:8-[9-6]=$	$4)9:3-[(28-10)-(9-2)]=$
$5)[4\cdot 2+20]:4+2(9:3)=$	$6)7\cdot 4:14-3[10-2(8-3)]=$
$7)65+(-40+3)=$	$8)-7-[-29-(4-13)+2]=$

$9)2[-18+3(-13+9)+5]=$	$10)-45-[-6+(-5-4)+2]-1=$
$11)-72:8-[19-16]=$	$12)24:3-[(-28+10)-(-9+2)]=$
$13)[4\cdot 2+20]:7+2(27:3)=$	$14)112\cdot 4:14-3[20-2(18-13)]=$
$15)(15:3+23):7+4(18:3)-1=$	$16)(333:3:3-3)+[15-2(11+3\cdot 3)]=$

2.4. Potenciación en $\mathbb{Z}$

En esta sección comenzaremos por definir una potencia cuya base sea un número entero y el exponente un número entero positivo, es decir, si a es un número entero cualquiera y k es un entero positivo, a^k se define como:

$$a^k = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdots a}_{k\text{-veces}}$$

Ejemplo 8. *:*

1. $5^3 = 5\cdot 5\cdot 5 = 125$
2. $6^2 = 6\cdot 6 = 36$
3. $(-4)^3 = (-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = -64$
4. $(-5)^4 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = 625$
5. $-2^5 = -2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = -32$
6. $-3^4 = -3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = -81$

Observación: Pongamos especial atención a los items *3*, *4*, *5* y *6* del ejemplo anterior. En los items *3* y *4* el exponente está actuando sobre todo lo que se encuentra dentro del paréntesis, mientras que en los items *5* y *6*, los exponentes actúan únicamente sobre el número y nunca sobre el signo $(-)$, es por ello que en estos dos últimos ejemplos el resultado es negativo.

Ejercicios 5. *Resuelva las siguientes operaciones aplicando la definición de potenciación en $\mathbb{Z}$.*

$1)2^3 =$	$2)3^2 =$	$3)(-3)^2 =$	$4)(-2)^2 =$
$5) -4^2 =$	$6) -2^2 =$	$7) -5^2 =$	$8)3^3 =$
$9)\ (-3)^2 =$	$10)\ (-4)^2 =$	$11)\ (-5)^2 =$	$12)\ (-2)^3 =$

Propiedades de las potencias o Leyes de los exponentes

A continuación vamos a exponer algunas propiedades de las potencias de modo simple y sencillo con el fin de poder recordarlas y aplicarlas con la estructura lógica que corresponde.

Multiplicación de potencias con igual base

Cuando se tiene una multiplicación de potencias con la misma base, se copia la base y se suman los exponentes.

$$a^k \cdot a^n = a^{k+n}$$

Ejemplo 9. *:*

1. $5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
2. $6^2 \cdot 6^3 = 6^{2+3} = 6^5$
3. $4^{11} \cdot 4^{16} = 4^{11+16} = 4^{27}$
4. $(-4)^3 \cdot (-4)^5 = (-4)^{4+5} = (-4)^9$
5. $(-5)^8 \cdot (-5)17 = (-5)^{8+17} = (-5)^{25}$

Toda base con exponente cero es igual a 1

Una potencia cuya base sea un número distinto de cero y el exponente es cero es igual a uno.

$$a^0 = 1$$

Ejemplo 10. *:*

1. $5^0 \cdot 5^4 = 5^{0+4} = 5^4$. *Si* 5^0 *fuese distinto de 1 entonces el resultado de este ejemplo no sería* 5^4 *o la propiedad anterior sería falsa.*
2. $6^2 \cdot 6^0 = 6^{2+0} = 6^2$
3. $(-4)^0 \cdot (-4)^5 = (-4)^{0+5} = (-4)^5$
4. $(-5)^8 \cdot (-5)0 = (-5)^{8+0} = (-5)^8$

División de potencias con igual base

Cuando se tiene una división de potencias con la misma base, se copia la base y se resta el exponente del denominador del exponente del numerador.

$$\frac{a^k}{a^n} = a^{k-n}$$

Ejemplo 11. *:*

1. $\frac{5^8}{5^2} = 5^{8-2} = 5^6$
2. $\frac{6^5}{6^3} = 6^{5-3} = 6^2$
3. $\frac{4^{16}}{4^{10}} = 4^{16-10} = 4^6$

4. $\frac{(-4)^7}{(-4)^5} = (-4)^{7-5} = (-4)^2$

5. $\frac{(-5)^8}{(-5)^7} = (-5)^{8-7} = (-5)^1 = -5$

Observación: Toda base positiva elevada a un exponente bien sea **par** o **impar** da como resultado un número positivo. Ahora bien, toda base negativa elevada a un exponente **par**, da como resultado un número positivo, ya que se aplica la ley de la signos del producto, es decir, si a es un numero entero positivo $-a$ es negativo y supongamos que k es un número **par**:

$(-a)^k = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdots (-a)$ es positiva, puesto que hay una cantidad par de factores $(-a)$ y la multiplicación de un número par de factores negativos es positiva.

Por otra parte, toda base negativa elevada a un exponente impar da como resultado un número negativo. El argumento es similar al caso de exponente par, es decir, si a es un numero entero positivo $-a$ es negativo y supongamos que k es un número **impar**:

$(-a)^k = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdots (-a)$ es negativa, puesto que hay una cantidad impar de factores $(-a)$ y la multiplicación de un número impar de factores negativos es negativa.

Ejemplo 12. *:*

1. $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$
2. $(-2)^6 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 64$
3. $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$
4. $(-6)^5 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = -7776$

Potencia de una potencia

Cuando se tiene una potencia de una potencia, se copia la base y se multiplican los exponentes.

$$\left(a^k\right)^n = a^{k \cdot n}$$

Ejemplo 13. *:*

1. $\left(7^2\right)^4 = 7^{2\cdot 4} = 7^8$
2. $\left(5^3\right)^6 = 5^{3\cdot 6} = 5^18$
3. $\left((-4)^2\right)^3 = (-4)^{2\cdot 3} = (-4)^6$

Ejercicios 6. *Resuelva las siguientes operaciones aplicando las propiedades de las potencias expuestas anteriormente sin calcular el valor final. De los ejercicios 22 al 30 ponga especial atención a los signos y los exponentes que actúan en los mismos.*

$1)2^2 \cdot 2^3 =$	$2)5^4 \cdot 5^8 =$	$3)7^8 \cdot 7^{11} =$
$4)\ (-4)^2 \cdot (-4)^9 =$	$5)\ (-8)^2 \cdot (-8)^9 =$	$6)\ (-5)^7 \cdot (-5)^9 =$
$7)\frac{3^6}{3^2} =$	$8)\frac{7^{11}}{7^3} =$	$9)\frac{15^{13}}{15^6} =$
$10)\frac{(-4)^2}{(-4)^2} =$	$11)\frac{(-6)^{13}}{(-6)^4} =$	$12)\frac{(-12)^7}{(-12)^2} =$
$13)\ \left(3^2\right)^2 =$	$14)\ \left(3^3\right)^2 =$	$15)\ \left(-2^2\right)^2 =$
$16)\ \left(-2^3\right)^2 =$	$17)\ \left(-3^3\right)^2 =$	$18)\ \left(-3^2\right)^2 =$
$19)\ \left(-2^2\right)^2 =$	$20)\ \left(-2^3\right)^2 =$	$21)\ \left(-3^2\right)^2 =$
$22)\ \left[(-2)^3\right]^2 =$	$23)\ \left[-(-2)^2\right]^2 =$	$24)\ \left[-(-2)^2\right]^3 =$
$25)\ \left[-(-3)^2\right]^3 =$	$26)\ \left([-2]^3\right)^3 =$	$27)\ \left(-\left[-2^3\right]^2\right)^5 =$
$28)-\left[-\left(-4^2\right)^2\right]^2 =$	$29)\left(\left[-\left(3^2\right)^2\right]^2\right)^3 =$	$30)\ \left(-\left[\left(3^3\right)^2\right]^4\right)^3 =$
$31)-\left[\left(-5^2\right)^4\right]^2 =$	$32)-\left(-\left[-\left(-4^2\right)^3\right]^2\right)^2 =$	$33)\ \left(\left[-\left(3^3\right)^3\right]^3\right)^3 =$

2.5. Operaciones sin signos de agrupación que incluyen potencias

Si tenemos una secuencia de operaciones combinadas que incluyen sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias, se resuelven primero las potencias, luego las multiplicaciones y divisiones y, por último, las sumas y las restas. En caso de que hayan varias operaciones con la misma jerarquía, la prioridad que se establece es de izquierda a derecha (ver ejemplos 2 y 3). En los ejemplos que aparecen a continuación, las llaves horizontales indican la jerarquía de cada situación.

Ejemplo 14. *:*

1)
$$\begin{aligned}
\underbrace{5^3}+7\cdot 3-8:2+5\cdot 3-\underbrace{4^2} &= 125+\underbrace{7\cdot 3}-\underbrace{8:2}+\underbrace{5\cdot 3}-16\\
&= 125+21-4+15-16\\
&= 161-20\\
&= 141
\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}
6+\underbrace{3^4}\cdot 2:9-15\cdot 9-\underbrace{8^3}:4-320 &= 6+\underbrace{81\cdot 2}:9-\underbrace{15\cdot 9}-\underbrace{512:4}-320\\
&= 6+\underbrace{162:9}-135-128-320\\
&= 6+18-135-128-320\\
&= 24-583\\
&= -559
\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}
-12\cdot 8:3+\underbrace{4^3}-\underbrace{5^2}+45:3-\underbrace{11^2} &= \underbrace{-12\cdot 8}:3+64-25+\underbrace{45:3}-121\\
&= \underbrace{-96:3}+64-25+15-121\\
&= -32+64-25+15-121\\
&= 79-178\\
&= -99
\end{aligned}$$

Ejercicios 7. *Realice los siguientes ejercicios tomando en cuenta que hay operaciones combinadas y signos de agrupación (aunque estos últimos solamente contienen un número negativo y no una operación aritmética), en tal sentido hay que respetar las jerarquías en las operaciones y las prioridades que imponen, en cada caso, los signos de agrupación.*

$1)2^2-1=$	$2)3^2-6=$	$3)4^2-5=$
$4)4-2^2=$	$5)6-2^2=$	$6)9-4^2=$
$7)(-2)^2-7=$	$8)7-(-2)^2=$	$9)15-5^2=$
$10)4-(-2)^2=$	$11)-(-2)^3-4=$	$12)6+(-2)^2=$
$13)3^2-2^3+1=$	$14)2^3-3-2^2=$	$15)4^2-1^3+4=$
$16)2^2+2-2^3=$	$17)2^2-1+(-1)^3=$	$18)2^4-2^3-5=$
$19)3^2-(-1)^2-6=$	$20)(-3)^2-2^2-1=$	$21)-(-3)^3+2^3+3=$
$22)2^3-(-1)^2-7=$	$23)8-3^2-(-1)^2=$	$24)(3)^4-2^3+1=$
$25)2^3-(-1)^3-4=$	$26)3^2-6-(-1)^3=$	$27)-5^2-2^2-1=$
$28)2^2+(-1)^3-2=$	$29)7-3^2+(-1)^2=$	$30)4^2+(-2)^3+5=$
$31)3^2+(-2)^3-1=$	$32)2^3+(-1)^3-6=$	$33)(-5)^2-(-2)^4+7=$
$34)5-(-2)^3-3^2=$	$35)3^2-8-(-2)^2=$	$36)(-7)^2+5^3+3=$

2.6. Operaciones con signos de agrupación que incluyen potencias

Si tenemos una secuencia de operaciones combinadas que incluyen sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias, pero además se incluyen signos de agrupación que contienen operaciones dentro de estos, se resuelven primero las operaciones que se encuentran dentro de los signos de agrupación respetándose la jerarquía de la operaciones aritméticas hasta que se eliminen dichos signos. Luego, se procede como en el caso de operaciones sin signos de agrupación, respetando las jerarquías de las operaciones aritméticas.

Ejemplo 15. *:*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1})\ \ 9+(15-2\cdot 5)^2-6(9\cdot 3-23)^3+4^2 &= 9+(15-10)^2-6(27-23)^3+4^2\\
&= 9+(5)^2-6(4)^3+4^2\\
&= 9+25-\underbrace{6\cdot 64}+16\\
&= 9+25-384+16\\
&= 50-384\\
&= -334
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{2})\ \ 15+(7\cdot 4-23)^2-5(2\cdot 3-9)^3-24:2 &= 15+(28-23)^2-5(6-9)^3-24:2\\
&= 15+(5)^2-5(-3)^3-24:2\\
&= 15+25\underbrace{-5(-27)}-12\\
&= 15+25+135-12\\
&= 175-12\\
&= 163
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{3})\ \ -(27:9-4)^2+((-2+8\cdot 3:4)^2-9)^2-9:3 &= -(\boldsymbol{3}-4)^2+((-2+\boldsymbol{24}:4)^2-9)^2-\boldsymbol{3}\\
&= -(-1)^2+((-2+\boldsymbol{6})^2-9)^2-3\\
&= -(1)+((4)^2-9)^2-3\\
&= -1+(16-9)^2-3\\
&= -1+(7)^2-3\\
&= -1+49-3\\
&= 49-4\\
&= 45
\end{aligned}
$$

Ejercicios 8. *Realice los siguientes ejercicios tomando en cuenta que hay operaciones combinadas y signos de agrupación, en tal sentido hay que respetar las jerarquías en las operaciones y las prioridades que imponen, en cada caso, los signos de agrupación.*

$1)5+(3+8)^2-3=$	$2)6-(5-9)^2+8=$
$3)-7+(3+5)^2+5-14=$	$4)-8-(2+3)^3-6^2+2=$
$5)15-(-3+1)^3-2^3+17=$	$6)9^2+3^3-(7-4)^2-45=$
$7)-82-(-3-2)^3-2^3-56=$	$8)-6^2-4^3+(-7+11)^2=$
$9)-5^3+(3-6)^2+(4+3-5)^3+8=$	$10)-(5-9)^2+(-7+11)^2=$
$11)-4^2-(7-4+5)^2-(-2+8-9)^3-1=$	$12)(4-5)^2-8^2-2^3=$
$13)1-(6-7)^2+35:(-5)=$	$14)(3-5)^2-4-2:(-2)=$
$15)(6-7)^2+2+36:(-6+3)^2=$	$16)(5-8)^2-6-(6-3)^3=$
$17)5-(6-7)^3+12^2:(-3)^2=$	$18)2(1-3)^3+2-(6-3)^2=$
$19)5(5-6)^2-(6-7)^2-6^3=$	$20)5(5-6)^3-(6-7)^4-6=$
$21)-(35:5-4)^2-(8\cdot 3:4-9)^2-15=$	$22)(35:5-4)^2+(6\cdot 3:9)^2=$
$23)-(8:4-4)^3-(10:5\cdot 3)^3+2=$	$24)(9:3-4)^3+(6:3:2)^2=$

3. Aritmética de Números Racionales

En esta nueva sección trabajaremos con números racionales ($\mathbb{Q}$), en particular, con números racionales escritos en forma de fracciones. Abordaremos en primer lugar, las cuatro operaciones básicas de la aritmética, luego trabajaremos las potencias de fracciones con exponentes enteros positivos y negativos y sus propiedades.

3.1. Operaciones aritméticas con números racionales

En este apartado abordamos las cuatro operaciones aritméticas en su forma más simple o rudimentaria.

1. $\frac{a}{k} + \frac{b}{k} = \frac{a+b}{k}$ (suma de fracciones con igual denominador)
2. $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} = \frac{a \cdot n + k \cdot b}{k \cdot n}$ (suma de fracciones con distintos denominadores)
3. $\frac{a}{k} - \frac{b}{k} = \frac{a-b}{k}$ (resta de fracciones con igual denominador)
4. $\frac{a}{k} - \frac{b}{n} = \frac{a \cdot n - k \cdot b}{k \cdot n}$ (suma de fracciones con distintos denominadores)
5. $\frac{a}{k} \cdot \frac{b}{n} = \frac{a \cdot b}{k \cdot n}$ (producto de fracciones)
6. $\frac{a}{k} : \frac{b}{n} = \frac{a \cdot n}{k \cdot b}$ (cociente de fracciones)
7. $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = \frac{a \cdot n \cdot m + b \cdot k \cdot m + c \cdot k \cdot n}{k \cdot n \cdot m}$ (suma de tres fracciones)
8. $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} - \frac{c}{m} = \frac{a \cdot n \cdot m + b \cdot k \cdot m - c \cdot k \cdot n}{k \cdot n \cdot m}$ (suma y resta de tres fracciones)

Sin embargo, si tenemos sumas o restas de tres o más fracciones con distintos denominadores, también podemos realizar estas operaciones haciendo uso del mínimo común múltiplo (*mcm*). El procedimiento consiste en lo siguiente:

1. Se calcula el *mcm* entre los denominadores y lo colocamos como denominador a todas las fracciones.
2. Multiplicamos el *mcm* por cada uno de los numeradores y el resultado lo dividimos por el denominador respectivo, preservándose los signos entre una fracción y otra.
3. Como las nuevas fracciones equivalentes tienen el mismo denominador, operamos de la forma ya conocida.

Ejemplo 16. *:*

1. $\frac{5}{7}+\frac{6}{11}=\frac{5\cdot 11+7\cdot 6}{7\cdot 11}=\frac{55+42}{77}=\frac{97}{77}$

2. $\frac{8}{5}-\frac{9}{2}=\frac{8\cdot 2-5\cdot 9}{5\cdot 2}=\frac{16-45}{10}=\frac{-29}{10}$

3. $\frac{7}{9}\cdot\frac{13}{3}=\frac{7\cdot 13}{9\cdot 3}=\frac{91}{27}$

4. $\frac{3}{5}:\frac{8}{15}=\frac{3\cdot 15}{5\cdot 8}=\frac{45}{40}$

5. $\frac{3}{8}+\frac{7}{6}+\frac{5}{18}=\frac{(72\cdot 3:8)+(72\cdot 7:6)+(72\cdot 5:18)}{72}=\frac{27+84+20}{72}=\frac{131}{72}$

6. $\frac{2}{15}-\frac{9}{10}+\frac{5}{12}-\frac{7}{4}=\frac{(60\cdot 2:15)-(60\cdot 9:10)+(60\cdot 5:12)-(60\cdot 7:4)}{60}=\frac{8-54+25-105}{60}=\frac{-126}{60}$

Ejercicios 9. *Realice los siguientes ejercicios tomando en cuenta que hay operaciones combinadas y signos de agrupación, en tal sentido hay que respetar las jerarquías en las operaciones y las prioridades que imponen, en cada caso, los signos de agrupación.*

1)$\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{4}{3}$	2)$\frac{2}{3}+\frac{7}{8}=\frac{37}{24}$	3)$\frac{2}{3}-\frac{7}{8}=-\frac{5}{24}$
4)$\frac{3}{24}-\frac{7}{12}=-\frac{11}{24}$	5)$-\frac{5}{3}+\frac{8}{5}=$	6)$5+\frac{7}{8}=$
7)$-3+\frac{5}{9}=$	8)$2-\frac{15}{7}=$	9)$-7-\frac{2}{3}=$
10)$-8-\frac{5}{4}=$	11)$3+\frac{7}{5}+\frac{3}{8}=$	12)$5+\frac{3}{7}+\frac{1}{4}=$
13)$2+\frac{5}{3}-\frac{2}{7}=$	14)$3+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}=$	15)$9-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=$
16)$\frac{9}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}=$	17)$\frac{15}{2}-\frac{7}{8}-\frac{5}{4}=$	18)$-\frac{4}{5}-\frac{2}{3}+\frac{1}{9}=$
19)$-\frac{2}{5}-\frac{3}{4}+\frac{2}{11}=$	20)$-\frac{5}{6}-\frac{7}{8}-\frac{9}{5}=$	21)$-\frac{3}{4}+\frac{6}{5}-\frac{7}{2}=$
22)$-\frac{9}{2}-\frac{5}{16}-\frac{3}{4}=$	23)$-\frac{5}{4}+\frac{2}{8}+\frac{7}{10}-\frac{4}{15}=$	24)$\frac{4}{3}-\frac{7}{6}+\frac{5}{12}-\frac{2}{15}=$

3.2. Operaciones combinadas de números racionales sin signos de agrupación

La jerarquía de la que hablamos cuando realizamos operaciones con números enteros también es válida para las operaciones con números racionales, más aún, es válida para las operaciones con todos los números reales.

Ejemplo 17. *:*

1)
$$\begin{aligned}\tfrac{5}{4}-\tfrac{4}{3}+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{7}{6}:\tfrac{2}{3} &= \tfrac{5}{4}-\tfrac{4}{3}+\tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{6}}+\tfrac{\mathbf{21}}{\mathbf{12}}\\ &= \tfrac{5}{4}-\tfrac{4}{3}+\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\tfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}\\ &= \tfrac{12}{4}-\tfrac{3}{3}\\ &= 3-1\\ &= 2\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}-\tfrac{6}{5}\cdot\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}:\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{2}{5}+\tfrac{7}{6}-\tfrac{3}{5} &= -\tfrac{\mathbf{12}}{\mathbf{15}}-\tfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{10}}\cdot\tfrac{2}{5}+\tfrac{7}{6}-\tfrac{3}{5}\\ &= -\tfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}-\tfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{25}}+\tfrac{7}{6}-\tfrac{3}{5}\\ &= \tfrac{7}{6}-\tfrac{43}{25}\\ &= -\tfrac{83}{150}\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{2}{3}:\tfrac{1}{2}-\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{5}{3}+\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{3}{5} &= \tfrac{2}{3}+\tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{15}}:\tfrac{1}{2}-\tfrac{\mathbf{20}}{\mathbf{15}}+\tfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{20}}\\ &= \tfrac{2}{3}+\tfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{15}}-\tfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}+\tfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\\ &= \tfrac{101}{60}-\tfrac{4}{3}\\ &= \tfrac{21}{60}\\ &= \tfrac{7}{20}\end{aligned}$$

Ejercicios 10. *Realiza los siguientes operaciones, tomando en cuenta la jerarquía que impone cada ejercicio.*

1)$\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}=$	2)$\frac{3}{8}-\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8}=$	3)$\frac{2}{3}-\frac{6}{5}:\frac{7}{8}=$
4)$\frac{3}{24}:\frac{7}{12}+\frac{3}{5}=$	5)$-\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{5}-\frac{2}{3}=$	6)$5+\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{8}=$
7)$-3+7\cdot\frac{5}{9}=$	8)$9-2:\frac{15}{7}=$	9)$\frac{2}{5}-7\cdot\frac{2}{3}=$
10)$\frac{3}{5}-8\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=$	11)$\frac{7}{3}+3\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{8}=$	12)$\frac{2}{7}-5\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{4}=$
13)$2\cdot\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)+\frac{5}{3}=$	14)$3+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\cdot\left[-\frac{2}{5}\right]=$	15)$9\cdot\left[-\frac{1}{3}\right]\cdot\frac{2}{5}-\frac{3}{5}=$
16)$\frac{4}{5}-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}+\frac{5}{6}:\frac{2}{7}=$	17)$6\cdot\left[-\frac{1}{2}\right]\cdot\left[-\frac{4}{3}\right]=$	18)$11\cdot\left(-\frac{7}{6}\right)-\frac{2}{5}=$
19)$\frac{7}{8}+\frac{4}{3}-\frac{1}{16}:\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{6}-\frac{1}{3}=$	20)$-6\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{5}=$	21)$(-8)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right):\frac{3}{7}=$
22)$\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{3}-\frac{2}{3}:\frac{1}{2}+\frac{7}{6}\cdot\frac{2}{3}=$	23)$\frac{6}{7}+\frac{1}{2}:\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=$	24)$\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{4}+\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{12}=$

3.3. Operaciones combinadas de números racionales con signos de agrupación

Al igual que en los números enteros, cuando tenemos operaciones combinadas con signos de agrupación, hay que resolver primero las operaciones que se encuentran dentro de los signos de agrupación y luego procedemos según la jerarquía de las operaciones aritméticas mencionada anteriormente.

Ejemplo 18. *:*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1)}\quad \frac{4}{5}\cdot\left[\frac{3}{4}+\frac{4}{3}-\frac{3}{8}\right]:\frac{7}{6} &= \frac{4}{5}\cdot\left[\frac{41}{24}\right]:\frac{7}{6}\\
&= \frac{164}{120}:\frac{7}{6}\\
&= \frac{\mathbf{41}}{\mathbf{30}}:\frac{7}{6} \quad \textit{simplificando la primera fracción (cuarta parte)}\\
&= \frac{246}{210}\\
&= \frac{\mathbf{41}}{\mathbf{35}} \quad \textit{simplificando la fracción (sexta parte)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{2})\quad \tfrac{1}{3}+\left(\tfrac{3}{8}+\tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{3}{2}\right)+\tfrac{2}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{15}:\tfrac{1}{6}\right) &= \tfrac{1}{3}+\left(\tfrac{3}{8}+\tfrac{15}{18}\right)+\tfrac{2}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{5}-\tfrac{12}{15}\right)\\
&= \tfrac{1}{3}+\left(\tfrac{3}{8}+\boldsymbol{\tfrac{5}{6}}\right)+\tfrac{2}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{5}-\boldsymbol{\tfrac{4}{5}}\right)\\
&= \tfrac{1}{3}+\tfrac{29}{24}+\tfrac{2}{3}\left(-\tfrac{3}{5}\right)\\
&= \tfrac{1}{3}+\tfrac{29}{24}-\tfrac{2}{5}\\
&= \tfrac{157}{120}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{3})\quad \left(\tfrac{5}{2}:\left[\tfrac{3}{2}+\tfrac{2}{5}:\tfrac{3}{10}\right]\right)\cdot\left(\left(\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{8}{3}-\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{5}{6}\right):\tfrac{2}{9}\right) &= \left(\tfrac{5}{2}:\left[\tfrac{3}{2}+\tfrac{20}{15}\right]\right)\cdot\left(\left(\tfrac{8}{12}-\tfrac{15}{48}\right):\tfrac{2}{9}\right)\\
&= \left(\tfrac{5}{2}:\left[\tfrac{3}{2}+\boldsymbol{\tfrac{4}{3}}\right]\right)\cdot\left(\left(\boldsymbol{\tfrac{2}{3}}-\boldsymbol{\tfrac{5}{16}}\right):\tfrac{2}{9}\right)\\
&= \left(\tfrac{5}{2}:\left[\tfrac{17}{6}\right]\right)\cdot\left(\left(\tfrac{17}{48}\right):\tfrac{2}{9}\right)\\
&= \tfrac{30}{34}\cdot\tfrac{153}{96}\\
&= \tfrac{15}{17}\cdot\tfrac{51}{32}\\
&= \tfrac{45}{32} \quad \textit{simplificando la fracción (diecisieteava parte)}
\end{aligned}
$$

Ejercicios 11. *Realiza los siguientes operaciones, tomando en cuenta la jerarquía que impone cada ejercicio.*

1) $\frac{5}{4}\cdot\left[\frac{3}{4}+\frac{4}{3}-\frac{3}{8}\right]:\frac{6}{7}=$

2) $\frac{7}{8}+\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{7}{8}+\frac{7}{6}-\frac{7}{15}\right)=$

3) $\frac{8}{7}+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\right):\frac{5}{3}+\frac{7}{6}=$

4) $-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{8}:\frac{3}{2}\right)+\frac{8}{3}:\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{6}\right)=$

5) $\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)+\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{5}+\frac{7}{6}:\frac{7}{2}\right)=$

6) $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{3}:\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{5}:\frac{1}{10}\right)=$

7) $\left(3+\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)-\frac{3}{5}\right):\left(\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{6}\right)\cdot\frac{6}{5}\right)=$

8) $-\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{14}:\frac{2}{21}\right):\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{2}:\frac{3}{4}\right)=$

9) $\left(\frac{8}{7}:3+\frac{9}{5}\cdot5\right)-3\cdot\left(\frac{1}{8}-2:\frac{1}{5}\right)=$

10) $\left(\frac{7}{8}-1+\frac{5}{9}\right)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{6}{5}\right)-\frac{1}{3}=$

11) $\left[\left(\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)\right)\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}+\frac{7}{6}\right]-\frac{7}{5}=$

12) $\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right]+\frac{3}{2}=$

13) $\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{2}\right)=$

14) $\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{3}{2}=$

3.4. Potenciación con base racional y exponentes enteros

Iniciamos esta parte del trabajo definiendo una potencia, cuya base es una fracción y el exponente un número entero positivo, es decir, si $\frac{a}{b}$ es un número racional cualquiera y k es un entero positivo, $\left(\frac{a}{b}\right)^k$ se define como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{k\text{-veces}} = \frac{a^k}{b^k}$$

Ejemplo 19. *:*

1. $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64}$
2. $\left(\frac{7}{8}\right)^4 = \left(\frac{7}{8}\right)\cdot\left(\frac{7}{8}\right)\cdot\left(\frac{7}{8}\right)\cdot\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{7^4}{8^4} = \frac{2401}{4096}$
3. $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$
4. $\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$
5. $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{2^3}{5^3}\right) = -\frac{8}{125}$

Propiedades de las potencias para números racionales

A continuación vamos a exponer algunas propiedades de las potencias, tal como lo hicimos con las potencias de bases enteras, con el fin de poder recordarlas y aplicarlas con la estructura lógica que corresponde.

Multiplicación de potencias con igual base

Cuando se tiene una multiplicación de potencias con la misma base, se copia la base y se suman los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{k+n}$$

Ejemplo 20. *:*

1. $\left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^6 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3+6} = \left(\frac{5}{4}\right)^9$
2. $\left(\frac{3}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6 = \left(\frac{3}{8}\right)^{5+6} = \left(\frac{3}{8}\right)^{11}$
3. $\frac{7}{4} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^5 = \left(\frac{7}{4}\right)^{1+5} = \left(\frac{7}{4}\right)^6$
4. $\left(-\frac{5}{9}\right)^3 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)^7 = \left(-\frac{5}{9}\right)^{3+7} = \left(-\frac{5}{9}\right)^{10}$
5. $\left(-\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^7 = \left(-\frac{2}{5}\right)^{4+7} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{11}$

División de potencias con igual base

Cuando se tiene una división de potencias con la misma base, se copia la base y se resta el exponente del denominador del exponente del numerador.

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^k}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{k-n}$$

Ejemplo 21. *:*

1. $\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^9}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \left(\frac{5}{4}\right)^{9-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^7$
2. $\frac{\left(\frac{7}{3}\right)^{17}}{\left(\frac{7}{3}\right)^{11}} = \left(\frac{7}{3}\right)^{17-11} = \left(\frac{7}{3}\right)^6$
3. $\frac{\left(\frac{6}{11}\right)^{29}}{\left(\frac{6}{11}\right)^{12}} = \left(\frac{6}{11}\right)^{29-12} = \left(\frac{6}{11}\right)^{17}$

4. $\frac{\left(-\frac{4}{5}\right)^{18}}{\left(-\frac{4}{5}\right)^{7}} = \left(-\frac{4}{5}\right)^{18-7} = \left(-\frac{4}{5}\right)^{11} = -\left(\frac{4}{5}\right)^{11}$

5. $\frac{\left(-\frac{5}{7}\right)^{22}}{\left(-\frac{5}{7}\right)^{12}} = \left(-\frac{5}{7}\right)^{22-12} = \left(-\frac{5}{7}\right)^{10}$

Potencia de una potencia

Cuando se tiene una potencia de una potencia, se copia la base y se multiplican los exponentes.

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^k\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{k\cdot n}$$

Ejemplo 22. *:*

1. $\left(\left(\frac{9}{4}\right)^2\right)^4 = \left(\frac{9}{4}\right)^{2\cdot 4} = \left(\frac{9}{4}\right)^8$
2. $\left(\left(\frac{5}{2}\right)^3\right)^6 = \left(\frac{5}{2}\right)^{3\cdot 6} = \left(\frac{5}{2}\right)^{18}$
3. $\left(\left(-\frac{7}{3}\right)^2\right)^3 = \left(-\frac{7}{3}\right)^{2\cdot 3} = \left(-\frac{7}{3}\right)^6$
4. $\left(\left(-\frac{2}{5}\right)^5\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)^{5\cdot 3} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{15} = -\left(\frac{2}{5}\right)^{15}$

Ejercicios 12. *Resuelva las siguientes potencias cuyas bases son números racionales aplicando las propiedades vistas hasta ahora (no hace falta calcular el resultado final, ya que podrían resultar cantidades muy grandes y lo que se persigue, fundamentalmente, es que se apliquen las propiedades). Solamente calcule las potencias en los ejercicios del (1) al (6).*

1) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 =$	2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 =$	3) $\left(\frac{1}{7}\right)^3 =$
4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 =$	5) $\left(\frac{-12}{5}\right)^2 =$	6) $\left(-\frac{5}{4}\right)^3 =$

7) $\left(\frac{6}{5}\right)^9 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^8 =$ 8) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 =$ 9) $\left(-\frac{5}{7}\right)^3 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) =$

10) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 =$ 11) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^{12} =$ 12) $\left(\frac{-2}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{-2}{7}\right)^8 =$

13) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{12}}{\left(\frac{2}{3}\right)^8} =$ 14) $\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{15}}{\left(\frac{4}{5}\right)^7} =$ 15) $\frac{\left(-\frac{9}{7}\right)^{13}}{\left(-\frac{9}{7}\right)^{12}} =$

16) $\frac{\left(\frac{7}{8}\right)^9}{\left(\frac{7}{8}\right)^3} =$ 17) $\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^6}{\left(-\frac{2}{3}\right)^4} =$ 18) $\frac{\left(-\frac{5}{7}\right)^{23}}{\left(-\frac{5}{7}\right)^{19}} =$

19) $\left[\left(\frac{2}{7}\right)^2\right]^3 =$ 20) $\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^3\right]^2 =$ 21) $\left(-\left(\frac{6}{-5}\right)^3\right)^2 =$

22) $\left[-\left(\frac{2}{7}\right)^2\right]^3 =$ 23) $\left[-\left(-\frac{2}{3}\right)^4\right]^2 =$ 24) $\left[-\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right]^2 =$

25) $\left(\left(-\frac{-1}{5}\right)^3\right)^2 =$ 26) $\left[-\left(\frac{7}{-6}\right)^3\right]^2 =$ 27) $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^2\right]^3 =$

Potencia con exponente negativo

En primer lugar, queremos hacer la siguiente observación: anteriormente, en el caso de las potencias con bases enteras no trabajamos este tipo de potencias con el fin de afianzar las propiedades vistas hasta este momento. Es por ello que comenzaremos por definir una potencia de base entera con exponente negativo.

Si k es un número entero positivo, se tiene que $-k$ es negativo. Por lo tanto, si se tiene una potencia con exponente negativo. Así, definimos

$$(a)^{-k} = \frac{1}{a^k}$$

Ejemplo 23. *:*

1. $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$
2. $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

3. $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$
4. $(-3)^{-5} = \frac{1}{(-3)^5} = -\frac{1}{243}$

De esta manera, si tenemos una potencia de base racional con exponente negativo, aplicando la definición anterior, tenemos que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k$$

Ejemplo 24. *:*

1. $\left(\frac{7}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{7}\right)^2$
2. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$
3. $\left(-\frac{2}{9}\right)^{-2} = \left(-\frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2$
4. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-5} = \left(-\frac{3}{1}\right)^5 - 3^5$

Ejercicios 13. *Desarrolle las siguientes potencias tomando en cuenta que los exponentes son* ***números enteros****. Aplique las propiedades cuando corresponda sin necesidad de realizar el cálculo final, es decir, dejando la potencia con exponente positivo.*

1)$4^{-1} =$	2)$6^{-2} =$	3)$5^{-2} =$	4)$3^{-3} =$
5) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1} =$	6) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} =$	7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$	8) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} =$
9) $\left(\frac{3}{12}\right)^{-2} =$	10) $\left(\frac{6}{18}\right)^{-3} =$	11) $\left(\frac{5}{10}\right)^{-3} =$	12) $\left(-\frac{6}{5}\right)^{-1} =$
13) $\left(-\frac{2}{6}\right)^{-1} =$	14) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} =$	15) $\left(-\frac{4}{8}\right)^{-2} =$	16) $\left(-\frac{7}{3}\right)^{-2} =$
17) $\left(\frac{25}{15}\right)^{-2} =$	18) $\left(\frac{8}{5}\right)^{-2} =$	19) $\left(-\frac{5}{8}\right)^{-2} =$	20) $\left(-\frac{8}{12}\right)^{-3} =$
21) $\left(3^{-2}\right)^{-2} =$	22) $\left[(-2)^{-3}\right]^{-1} =$	23) $\left[(-2)^{-1}\right]^{-2} =$	24) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}\right]^{-2} =$

25) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-1} =$ 26) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-3} =$ 27) $\left[\left(\frac{9}{6}\right)^{-1}\right]^{-2} =$

28) $\left[-\left(-3\right)^{-2}\right]^{2} =$ 29) $\left[-\left(\frac{4}{8}\right)^{-2}\right]^{3} =$ 30) $\left[-\left(\frac{4}{6}\right)^{3}\right]^{-2} =$

31) $\left[-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}\right]^{3} =$ 32) $\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^{-2} =$ 33) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-1} =$

34) $\left[-\left(\frac{2}{6}\right)^{-1}\right]^{-2} =$ 35) $\left[-\left(-\frac{8}{4}\right)^{2}\right]^{-3} =$ 36) $\left[-\left(-\frac{8}{4}\right)^{-3}\right]^{-1} =$

37) $\left[-\left(\frac{8}{12}\right)^{-1}\right]^{-3} =$ 38) $\left[\left(-\frac{12}{18}\right)^{-2}\right]^{-1} =$ 39) $\left[-\left(-\frac{6}{18}\right)^{-2}\right]^{-1} =$

40) $\left[-\left(-\frac{1}{2^{-1}}\right)^{-3}\right]^{-1} =$ 41) $\left[-\left(-\frac{3}{4^{-1}}\right)^{-2}\right]^{-3} =$ 42) $\left[\left(-\frac{2}{4^{-3}}\right)^{-1}\right]^{-2} =$

4. Radicales y exponentes fraccionarios

Es bien conocido que no todos los números tienen raíces exactas, cualquiera sea el índice de la raíz con que se trabaje. Sin embargo, en determinados casos podemos reescribir la cantidad subrradical como producto de factores más simples y extraer de la raíz algunos de estos factores y, así, podemos simplificar los cálculos. En el caso de valores numéricos dentro de la raíz, hablamos de reescribir estos valores como producto de factores primos, en cualquier otro caso nos fijamos en los exponentes, si los hay.

Observación: Puesto que lo que se persigue en este curso es nivelar o reforzar algunos temas estudiados en bachillerato, consideraremos las cantidades subrradicales **siempre positivas** independientemente del índice de la raíz.

Primeramente, mostramos cómo extraer cantidades subrradicales de una raíz, cualquiera sea su índice y luego estudiaremos algunas propiedades de los radicales.

Supongamos que tenemos n y k números enteros con $n \geq k \geq 2$. Si al dividir n por k nos da como resultado el número t y de resto r, entonces

$$\sqrt[k]{a^n} = a^t \cdot \sqrt[k]{a^r}$$

Ejemplo 25. *:*

1. $\sqrt[7]{a^{19}} = a^2 \cdot \sqrt[7]{a^5}$
2. $\sqrt[5]{8^{13}} = 8^2 \cdot \sqrt[5]{8^3}$
3. $\sqrt[3]{7^{26}} = 7^8 \cdot \sqrt[3]{7^2}$
4. $\sqrt{3^{15}} = 3^7 \cdot \sqrt{3}$
5. $\sqrt[3]{16384} = \sqrt[3]{2^{14}} = 2^4 \cdot \sqrt[3]{2^2}$
6. $\sqrt[4]{3^{15}a^7b^{14}c^{24}} = 3^4ab^3c^6\sqrt[4]{3^3a^3b^2}$
7. $\sqrt[6]{5^9a^{13}b^{17}c^{23}} = 5a^2b^2c^3\sqrt[6]{2^3ab^5}$

Ejercicios 14. *Descomponga en factores primos las cantidades subradicales y extraiga de las raíces el mayor número de potencias posibles.*

1) $\sqrt{75} =$	2) $\sqrt[3]{40} =$	3) $\sqrt{27} =$
4) $\sqrt[3]{810} =$	5) $\sqrt{216} =$	6) $\sqrt[3]{864} =$
7) $\sqrt[4]{1350} =$	8) $\sqrt{864} =$	9) $\sqrt{600} =$
10) $\sqrt[3]{972} =$	11) $\sqrt[5]{960} =$	12) $\sqrt[3]{486} =$
13) $\sqrt{1500} =$	14) $\sqrt[5]{1600} =$	15) $\sqrt[3]{1200} =$
16) $\sqrt{1480} =$	17) $\sqrt[5]{1440} =$	18) $\sqrt{250} =$
19) $\sqrt{8a} =$	20) $\sqrt{486b^7} =$	21) $\sqrt[3]{270a^5} =$
22) $\sqrt[3]{120a^4} =$	23) $\sqrt[3]{24c^8} =$	24) $\sqrt[2]{75ab^3} =$
25) $\sqrt[3]{1200a^7} =$	26) $\sqrt[3]{19440a^4b^9} =$	27) $\sqrt{72a^{11}} =$
28) $\sqrt[4]{18a^7b^5} =$	29) $\sqrt[5]{45a^3b^{12}} =$	30) $\sqrt[4]{45a^{15}b^2} =$

31) $\sqrt[5]{50a^6b^7c^8} =$ 32) $\sqrt{210a^4b^5c} =$ 33) $\sqrt[4]{54a^5b^3c^7} =$

34) $\sqrt[5]{72a^3} =$ 35) $\sqrt[6]{50a^3} =$ 36) $\sqrt[4]{54a^2} =$

37) $\sqrt[7]{75a^5} =$ 38) $\sqrt[5]{72a^4} =$ 39) $\sqrt[6]{90a^3} =$

40) $\sqrt[3]{50a^2} =$ 41) $\sqrt[5]{27ab^2} =$ 42) $\sqrt[7]{45a^5b} =$

43) $\sqrt[4]{50a^3b} =$ 44) $\sqrt[5]{54ab^5} =$ 45) $\sqrt[4]{27ab^5} =$

46) $\sqrt[6]{75a^4b} =$ 47) $\sqrt[5]{45ab^4} =$ 48) $\sqrt[4]{180a^5b^3} =$

A continuación estudiaremos algunas propiedades de los radicales o raíces. Para ello, supongamos que a, b, n y k son enteros positivos con n y k mayores o iguales que 2.

R1 $\sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[k]{a \cdot b}$

R2 $\dfrac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}} = \sqrt[k]{\dfrac{a}{b}}$

R3 $\sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[k \cdot n]{a^n \cdot b^k}$

R4 $\dfrac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[kn]{\dfrac{a^n}{b^k}}$

R5 $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[k \cdot n]{a}$

Ejercicios 15. *Realice las siguientes operaciones con radicales aplicando las propiedades anteriores y luego, en los casos que sea posible, extraiga de las raíces las cantidades subrradicales que lo permitan.*

1) $\sqrt{3}\sqrt{3} =$ 2) $\sqrt{2}\sqrt{6} =$ 3) $\sqrt{3}\sqrt{6} =$ 4) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2} =$

5) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3} =$ 6) $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3} =$ 7) $\sqrt[5]{3}\sqrt[5]{4} =$ 8) $\sqrt[5]{2}\sqrt[5]{4} =$

9) $\sqrt[3]{18}\sqrt[3]{6} =$ 10) $\sqrt[3]{6}\sqrt[4]{12} =$ 11) $\sqrt[5]{18}\sqrt[3]{18} =$ 12) $\sqrt{9}\sqrt[5]{9} =$

13) $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a} =$	14) $\sqrt{2}\sqrt{a} =$	15) $\sqrt[5]{a}\sqrt[5]{3a} =$	16) $\sqrt[3]{2a}\sqrt[3]{a} =$
17) $\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{4a} =$	18) $\sqrt[5]{a^2}\sqrt[3]{4a} =$	19) $\sqrt[7]{9a^2}\sqrt{3} =$	20) $\sqrt[3]{4a^3}\sqrt[5]{4a^2} =$
21) $\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{ab} =$	22) $\sqrt{3}\sqrt[4]{3ab} =$	23) $\sqrt[3]{2ab}\sqrt[5]{b} =$	24) $\sqrt[5]{2ab}\sqrt[3]{2a^3b^4} =$
25) $\sqrt[6]{4a^2}\sqrt[3]{4ab} =$	26) $\sqrt[5]{2ab^2}\sqrt[7]{ab} =$	27) $\sqrt[4]{9}\sqrt[6]{9a^2b^2} =$	28) $\sqrt[6]{a^2b^2}\sqrt[5]{3a^2} =$
29) $\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{6}} =$	30) $\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[4]{12}} =$	31) $\frac{\sqrt[5]{18}}{\sqrt[3]{18}} =$	32) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[5]{9}} =$
33) $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} =$	34) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} =$	35) $\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{3a}} =$	36) $\frac{\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{a}} =$
37) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{4a}} =$	38) $\frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[3]{4a}} =$	39) $\frac{\sqrt[7]{9a^2}}{\sqrt{3}} =$	40) $\frac{\sqrt[3]{4a^3}}{\sqrt[5]{4a^2}} =$
41) $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{ab}} =$	42) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3ab}} =$	43) $\frac{\sqrt[3]{2ab}}{\sqrt[3]{b}} =$	44) $\frac{\sqrt[5]{2ab}}{\sqrt[3]{2a^3b^4}} =$
45) $\frac{\sqrt[3]{4a^2}}{\sqrt[3]{4ab}} =$	46) $\frac{\sqrt[5]{2ab^2}}{\sqrt[7]{ab}} =$	47) $\frac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt[6]{9a^2b^2}} =$	48) $\frac{\sqrt[6]{a^2b^2}}{\sqrt[5]{3a^2}} =$
49) $\sqrt{\sqrt[3]{6}} =$	50) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{12}} =$	51) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{18}} =$	52) $\sqrt{\sqrt[5]{9}} =$
53) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}} =$	54) $\sqrt{\sqrt{a^4}} =$	55) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{64b^6}} =$	56) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{243a^6b^7}} =$

Escribir una Raíz $k-$*ésima* como potencia con exponente fraccionario

Otra manera de escribir o representar una raíz de índice k o raíz $k-$*ésima* consiste en llevarla a forma de potencia con exponente fraccionario, es decir,

$$\sqrt[k]{a^t} = a^{\frac{t}{k}}$$

Ejemplo 26. *:*

1. $\sqrt[7]{a^{19}} = a^{\frac{19}{7}}$
2. $\sqrt[5]{8^{13}} = 8^{\frac{13}{5}}$

3. $\sqrt[3]{7^{24}} = 7^{\frac{24}{3}} = 7^8$

4. $\sqrt{3^{15}} = 3^{\frac{15}{2}}$

5. $\left[\sqrt[3]{5}\right]^4 = \sqrt[3]{5^4} = 5^{\frac{4}{3}}$

6. $\sqrt[3]{16384} = \sqrt[3]{2^{14}} = 2^{\frac{14}{3}}$

7. $\sqrt[4]{3^{15}a^7b^{14}c^{24}} = 3^{\frac{15}{4}}a^{\frac{7}{4}}b^{\frac{14}{4}}c^{\frac{24}{4}} = 3^{\frac{15}{4}}a^{\frac{7}{4}}b^{\frac{7}{2}}c^6$

Ejercicios 16. *Reescriba primero cada expresión como potencia con exponente fraccionario y luego aplique las propiedades de potencias que correspondan.*

1) $\sqrt{2}\sqrt[3]{6} =$	2) $\sqrt{3}\sqrt[3]{9} =$	3) $\sqrt{2}\sqrt[6]{2} =$	4) $\sqrt{2}\sqrt[6]{6} =$
5) $\sqrt{2}\sqrt[3]{3} =$	6) $\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{6} =$	7) $\sqrt{2}\sqrt[6]{32} =$	8) $\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{32} =$
9) $\sqrt[3]{6}\sqrt[6]{96} =$	10) $\sqrt{a}\sqrt[3]{4} =$	11) $\sqrt{2}\sqrt[6]{a} =$	12) $\sqrt{a}\sqrt[6]{a^5} =$
13) $\sqrt{3}\sqrt[3]{a^2} =$	14) $\sqrt{3a}\sqrt[3]{a} =$	15) $\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a^5} =$	16) $\sqrt{2}\sqrt[3]{4a} =$
17) $\sqrt[6]{a}\sqrt[3]{2a} =$	18) $\sqrt{a}\sqrt[3]{2a^2} =$	19) $\sqrt[3]{3a}\sqrt[6]{3a} =$	20) $\sqrt{3}\sqrt[3]{ab^2} =$
21) $\sqrt[6]{2b^5}\sqrt[3]{2b} =$	22) $\sqrt{3a}\sqrt[3]{a^2b} =$	23) $\sqrt{ab}\sqrt[3]{a^2b} =$	24) $\sqrt{2a}\sqrt[6]{ab^5} =$

Ejercicios 17. *Reescriba primero cada expresión como potencia con exponente fraccionario y luego aplique las propiedades de potencias que correspondan (suponga que las letras **a** y **b** de estos ejercicios representan valores positivos). En los casos que corresponda, descomponga en factores primos las cantidades subradicales y aplique las propiedades.*

1) $\left[\sqrt{2}\right]^2 =$	2) $\left[\sqrt{3}\right]^4 =$	3) $\left[\sqrt{3}\right]^3 =$	4) $\left[\sqrt{6}\right]^3 =$
5) $\left[\sqrt[4]{2}\right]^2 =$	6) $\left[\sqrt[3]{2}\right]^3 =$	7) $\left[\sqrt[3]{3}\right]^5 =$	8) $\left[\sqrt[3]{4}\right]^4 =$
9) $\left[\sqrt[3]{4}\right]^5 =$	10) $\left[\sqrt[3]{12}\right]^4 =$	11) $\left[\sqrt[4]{27}\right]^3 =$	12) $\left[\sqrt[4]{27}\right]^6 =$
13) $\left[\sqrt[4]{2}\right]^6 =$	14) $\left[\sqrt{2a}\right]^2 =$	15) $\left[\sqrt[4]{3a}\right]^5 =$	16) $\left[\sqrt[4]{8a}\right]^2 =$

17) $\left[\sqrt[4]{2a^3}\right]^6 =$ 18) $\left[\sqrt[3]{a^2}\right]^2 =$ 19) $\left[\sqrt[4]{3a^3}\right]^2 =$ 20) $\left[\sqrt[3]{3a^2}\right]^5 =$

21) $\left[\sqrt[4]{2b^3}\right]^2 =$ 22) $\left[\sqrt[3]{4ab}\right]^5 =$ 23) $\left[\sqrt[4]{a^3b^3}\right]^2 =$ 24) $\left[\sqrt[4]{8ab^3}\right]^6 =$

Ejercicios 18. *Agrupar en una sola raíz y expresarla como exponente fraccionario.*

1) $\sqrt{\sqrt[3]{4}} =$ 2) $\sqrt[3]{\sqrt[6]{4}} =$ 3) $\sqrt{\sqrt[5]{16}} =$ 4) $\sqrt{\sqrt[3]{25}} =$

5) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} =$ 6) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{25}} =$ 7) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{36}} =$ 8) $\sqrt{\sqrt[5]{100}} =$

9) $\sqrt{\sqrt[5]{144}} =$ 10) $\sqrt{\sqrt[5]{324}} =$ 11) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{216}} =$ 12) $\sqrt{\sqrt[3]{225}} =$

13) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{100}} =$ 14) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{216}} =$ 15) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{125}} =$ 16) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{625}} =$

17) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{324}} =$ 18) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}} =$ 19) $\sqrt{6\sqrt[3]{6}} =$ 20) $\sqrt[5]{9\sqrt{3}} =$

21) $\sqrt[3]{5\sqrt[5]{5}} =$ 22) $\sqrt[5]{10\sqrt[4]{10}} =$ 23) $\sqrt[5]{40\sqrt[3]{50}} =$ 24) $\sqrt[5]{225\sqrt{15}} =$

25) $\sqrt{\sqrt[5]{9a^4}} =$ 26) $\sqrt{\sqrt[3]{9a^2}} =$ 27) $\sqrt{\sqrt[3]{4a^4}} =$ 28) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{9a^4}} =$

29) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8a^3}} =$ 30) $\sqrt{\sqrt[5]{81a^2}} =$ 31) $\sqrt{\sqrt[5]{16a^2}} =$ 32) $\sqrt{\sqrt[5]{81a^4}} =$

Más operaciones con radicales

Existen determinadas situaciones donde resulta válido sumar o restar raíces de *igual índice*, esto solo es posible cuando las cantidades subrradicales son iguales.

Ejemplo 27. *:*

1. $\sqrt{a} - 4\sqrt{a} + 6\sqrt{a} + 5\sqrt{b} = \mathbf{3}\sqrt{a} + 5\sqrt{b}$
2. $\sqrt[3]{ab} + 5\sqrt[3]{ab} - 4\sqrt[3]{bc^2} + 6\sqrt[3]{bc^2} + 9\sqrt[3]{abc^2} = \mathbf{6}\sqrt[3]{ab} + \mathbf{2}\sqrt[3]{bc^2} + 9\sqrt[3]{abc^2}$
3. $\sqrt{9xy} + \sqrt[3]{8xy} - 6\sqrt[3]{xy} + 5\sqrt{12xy} + 4\sqrt[3]{5xy} = \mathbf{3}\sqrt{xy} + \mathbf{2}\sqrt[3]{xy} - 6\sqrt[3]{xy} + 5\cdot\mathbf{2}\sqrt{3xy} + 4\sqrt[3]{5xy}$

$$= 3\sqrt{xy} - \mathbf{4}\sqrt[3]{xy} + \mathbf{10}\sqrt{3xy} + 4\sqrt[3]{5xy}$$

4. $2\sqrt[3]{8xy}+\sqrt[4]{81xy}-\sqrt[3]{27x^4y^4}+4\sqrt[4]{32xy}+7\sqrt[5]{xy}=2\cdot 2\sqrt[3]{xy}+3\sqrt[4]{xy}-3xy\sqrt[3]{xy}+4\cdot 2\sqrt[4]{2xy}+7\sqrt[5]{xy}$

$$=\mathbf{4}\sqrt[3]{xy}+3\sqrt[4]{xy}-3xy\sqrt[3]{xy}+\mathbf{8}\sqrt[4]{2xy}+7\sqrt[5]{xy}$$

$$=(\mathbf{4}-\mathbf{3xy})\sqrt[3]{xy}+3\sqrt[4]{xy}+8\sqrt[4]{2xy}+7\sqrt[5]{xy}$$

5. $\sqrt{a+b}+3\sqrt[4]{x+y}-\sqrt{9(a+b)}+5\sqrt[4]{x-y}=\sqrt{a+b}+\mathbf{3}\sqrt[4]{x+y}-3\sqrt{a+b}+5\sqrt[4]{x-y}$

$$=-2\sqrt{a+b}+\mathbf{3}\sqrt[4]{x+y}+5\sqrt[4]{x-y}$$

6. $2\sqrt[3]{64(w+z)}+3\sqrt{25(w+z)}-3\sqrt[3]{27(w+z)}+5\sqrt{9(w+z)}=2\cdot 4\sqrt[3]{w+z}+3\cdot 5\sqrt{w+z}-3\cdot 3\sqrt[3]{w+z}+5\cdot 3\sqrt{w+z}$

$$=8\sqrt[3]{w+z}+15\sqrt{w+z}-9\sqrt[3]{w+z}+15\sqrt{w+z}$$

$$=-\sqrt[3]{w+z}+30\sqrt{w+z}$$

Ejercicios 19. *Realice las siguientes operaciones y al final reescriba el resultado en los casos que se pueda como potencias con exponentes fraccionarios.*

1) $-5+\sqrt{8}-1+\sqrt{18}$

2) $2-\sqrt{20}-1+\sqrt{80}$

3) $\sqrt{48}+3-\sqrt{12}+4$

4) $\sqrt{75}-4\sqrt{3}+3+1$

5) $\sqrt[3]{40}+3+2+4\sqrt[3]{5}$

6) $5\sqrt[3]{3}-5-\sqrt[3]{24}-\sqrt{27}$

7) $4-\sqrt{27}+\sqrt{12}-\sqrt{48}$

8) $\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}-4-\sqrt[3]{625}$

9) $4\sqrt{5}+\sqrt[3]{16}-5\sqrt[3]{2}-\sqrt{80}$

10) $5\sqrt{3}-\sqrt{27}+\sqrt{8}+\sqrt{32}$

11) $\sqrt{6}-\sqrt{96}+\sqrt{54}+4\sqrt{6}$

12) $5\sqrt{5}-\sqrt{125}-3-\sqrt{20}$

13) $\sqrt{80}+3\sqrt{2}-\sqrt{8}-\sqrt{18}+4\sqrt{125}$

14) $\sqrt[3]{40}-5+2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{125}-2\sqrt[3]{45}$

15) $3\sqrt[3]{108}-\sqrt{18}-3\sqrt[5]{2}-\sqrt[3]{32}+\sqrt[5]{64}$

16) $\sqrt[3]{500}-\sqrt{8}+5\sqrt{5}+\sqrt{18}-\sqrt[3]{32}+2\sqrt[5]{5}$

17) $2\sqrt[3]{8xy}+\sqrt[4]{81xy}-\sqrt[3]{27xy}+4\sqrt[4]{16xy}+7\sqrt[5]{xy}$

18) $3\sqrt[3]{ac}+5\sqrt[4]{ac}-7\sqrt[3]{ac}+3\sqrt[4]{ac}$

19) $\sqrt{9xy}+\sqrt[3]{8xy}-6\sqrt[3]{xy}+5\sqrt{12xy}+4\sqrt[3]{5xy}$

20) $\sqrt{9bt}-\sqrt[3]{27bt}-\sqrt[3]{8bt}-\sqrt{16bt}+7\sqrt[3]{bt}$

21) $\sqrt{9bt}-\sqrt[3]{27bt}-\sqrt[3]{8bt}-\sqrt{16bt}-\sqrt[3]{27bt}-\sqrt[3]{8bt}-\sqrt{16bt}-\sqrt[3]{27bt}-\sqrt[3]{8bt}-\sqrt{16bt}$

22) $\sqrt{9bt}-\sqrt[3]{27bt}-\sqrt[3]{8bt}-\sqrt{16bt}-\sqrt[3]{27bt}-\sqrt[3]{8bt}-\sqrt{16bt}-\sqrt[3]{27bt}-\sqrt[3]{8bt}-\sqrt{16bt}$

23) $\sqrt{9bt}-\sqrt[3]{27bt}-\sqrt[3]{8bt}-\sqrt{16bt}-\sqrt[3]{27bt}-\sqrt[3]{8bt}-\sqrt{16bt}-\sqrt[3]{27bt}-\sqrt[3]{8bt}-\sqrt{16bt}$

5. Productos Notables

Cuando realizamos productos en operaciones algebraicas o aritméticas se siguen algoritmos o procedimientos que conducen al resultado esperado. No obstante, en determinados casos, hay productos algebraicos que permiten reducir el número de operaciones mediante reglas que evitan la multiplicación término a término y obtener de forma simplificada el resultado. Estos productos reciben el nombre de productos notables.

Aunque no apostamos por la memorización de reglas, en este caso se hace casi obligatorio tener siempre presente estas reglas algebraicas llamadas productos notables.

A continuación destacamos los productos notables de uso más frecuente en el álgebra.

PN1 $(x+n)^2 = x^2 + 2xn + n^2$ *Cuadrado de un binomio (suma).*

PN2 $(x-n)^2 = x^2 - 2xn + n^2$ *Cuadrado de un binomio (resta).*

PN3 $\underbrace{(x+n)(x-n)}_{\textit{(Suma por su diferencia)}} = \underbrace{x^2 - n^2}_{\textit{(Diferencia de cuadrados)}}$

PN4 $(x+n)(x+k) = x^2 + (n+k)x + nk$

PN5 $(x+n)^3 = x^3 + 3x^2n + 3xn^2 + n^3$ *Cubo de un binomio (suma)*

PN6 $(x-n)^3 = x^3 - 3x^2n + 3xn^2 - n^3$ *Cubo de un binomio (resta)*

PN7 $(x+n)(x^2 - xn + n^2) = \underbrace{x^3 + n^3}_{\text{(Suma de cubos)}}$

PN8 $(x-n)(x^2 + xn + n^2) = \underbrace{x^3 - n^3}_{\text{(Diferencia de cubos)}}$

Hay otros productos notables que se usan con menos frecuencia como el cuadrado de un trinomio o el cubo de un trinomio, entre otros.

Por otra parte, hacemos la siguiente observación, puesto que es un error muy frecuente en algunos estudiantes.

$$\boxed{(x \pm n)^k \neq x^k \pm n^k}$$

Ejemplo 28. *:*

1. $(k+9)^2 = k^2 + 18k + 81$
2. $(2m-5)^2 = 4m^2 - 20m + 25$
3. $(3x+y^2)(3x-y^2) = (3x)^2 - (y^2)^2 = 9x^2 - y^4$
4. $(3yz^2+5t^3)(3yz^2+4x^4) = (3yz^2)^2 + (5t^3+4x^4)3yz^2 + (5t^3)(4x^4)$

   $= 9y^2z^4 + (5t^3+4x^4)3yz^2 + 20t^3x^4$
5. $(2z+3xz^2)^3 = (2z)^3 + 3(2z)^2(3xz^2) + 3(2z)(3xz^2)^2 + (3xz^2)^3$

   $= 8z^3 + 36xz^4 + 54x^2z^5 + 27x^3z^6$
6. $(5a-2x)^3 = (5a)^3 - 3(5a)^2(2x) + 3(5a)(2x)^2 - (2x)^3$

   $= 125a^3 - 150xa^2 + 60ax^2 - 8x^3$

Ejercicios 20. *Desarrolle los siguientes productos notables*

1) $(2+x)^2$	2) $(a+5)^2$	3) $(4-z)^2$
4) $(-3+t)^2$	5) $(-2-r)^2$	6) $(2a+b)^2$
7) $(3x+4t)^2$	8) $(5y-9w)^2$	9) $(-4z+8h)^2$
10) $\left(2a^3+5a^2\right)^2$	11) $\left(4w^3-2r^3\right)^2$	12) $\left(-3n^2+k^5\right)^2$
13) $\left(2a^2b^3+3ab^2\right)^2$	14) $\left(4x^3y^2-2xy^3z^2\right)^2$	15) $\left(2a^3(bc)^2-3(ab)^4t^3\right)^2$
16) $\left(1+\sqrt{5}\right)^2 =$	17) $\left(3+\sqrt{6}\right)^2 =$	18) $\left(-2+\sqrt{2}\right)^2 =$
19) $\left(-3-\sqrt{2}\right)^2 =$	20) $\left(1+2\sqrt{6}\right)^2 =$	21) $\left(3+3\sqrt{3}\right)^2 =$

6. Factorización de expresiones algebraicas

Antes de dar inicio al tema de factorización, lo primero que debemos tener claro es ¿qué significa factorizar? y más concretamente, ¿qué significa factorizar una expresión algebraica? Cuando multiplicamos o realizamos el producto de dos expresiones numéricas o algebraicas, estas expresiones también reciben el nombre de *factores*. Cuando hablamos de factorizar, nos referimos a escribir una expresión como producto de otras expresiones más simples.

Ejemplo 29. *:*

1) $x^2 + x = x(x+1)$

2) $3t^2 + 5t = t[3t+5]$

3) $8k^6 - 4k^7 = 4k^6(2-k)$

4) $3h^5 - 7h^6 + 9h^{11} = h^5[3 - 7h + 9h^6]$

5) $z^2 + 5z + 6 = (z+2)(z+3)$

6) $y^3\text{-}p^3 = (y\text{-}p)(y^2\text{+}yp + p^2)$

7) $r^3\text{+}m^3 = (r\text{+}m)(r^2\text{-}rm + m^2)$

8) $w^3 - 2w^2 - 35w = w(w-7)(w+5)$

9) $\frac{t^2+2t-15}{t^2-4} = \frac{(t+5)(t-3)}{(t-2)(t+2)}$

10) $\frac{A^2-9}{A^2-2A-3} = \frac{(A+3)\cancel{(A-3)}}{(A+1)\cancel{(A-3)}} = \frac{(A+3)}{(A+1)}$

11) $\frac{2r^2-r-1}{5r^3-3r^2-2r} = \frac{(2r+1)\cancel{(r-1)}}{r(5r+2)\cancel{(r-1)}} = \frac{(2r+1)}{r(5r+2)}$

12) $a^2b^3c^5 + a^5b^2c^4d^6 = a^2b^2c^4[bc + a^3d^6]$

Ejercicios 21. *Factorice las siguientes expresiones y simplifíquelas tanto como sea posible.*

1) $a^3 - 3a^2 - 4a + 12$

2) $t^2 + 14t + 49$

3) $49w^2 + n^2 + 14wn$

4) $18a^3 - 8ab^2$

5) $-3t^5 - 81t^2r^3$

6) $zm^4 - zp^4$

7) $\frac{4x^4-4x^3+x^2}{4x^3-2x^2}$

8) $\frac{4w^4-w^2}{4w^3+2w^2}$

9) $\frac{4z^3-4z^2+z}{4z^2-2z}$

10) $\frac{4x}{4x^2-2x}$

11) $\frac{6x^2+12x}{12x-3x^3}$

12) $\frac{12x-6}{12x^2-12x+3}$

13) $\frac{9x^2}{3x^3+3x^2}$

14) $\frac{4x}{2x^2-2x}$

15) $\frac{4x^2+4x}{2x^3+4x^2+2x}$

16) $\frac{3x^4+12x^3+12x^2}{3x^3+6x^2}$

17) $\frac{3x^3+6x^2}{3x^2}$

18) $\frac{3x^2-12}{3x-6}$

19) $\frac{8x^3+4x^2}{8x^4-2x^2}$

20) $\frac{6x^3-6x^2}{3x^4-3x^2}$

21) $\frac{x^3-2x^2}{x^4-4x^3+4x^2}$

7. Valor numérico de una expresión algebraica

El valor numérico de una expresión algebraica consiste en sustituir una variable o un conjunto de variables que se encuentran en la expresión algebraica por un número o conjunto de números determinados en cada variable, siempre que sea posible.

Hallar los valores numéricos en cada una de las expresiones algebraicas tal como se indican.

Ejemplo 30. *:*

1. *$x^3 - 4x^2 + 5x - 5$, para $x = 3$.*

   $3^3 - 4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 5 =$
   $27 - 4 \cdot 9 + 15 - 5 =$
   $27 - 36 + 15 - 5 =$
   1

2. *$3y^5 + y^4 - 4y^3 - 5y^2 - 8y + 7$, para $y = 2$.*

   $3(-2)^5 + (-2)^4 - 4(-2)^3 - 5(-2)^2 - 8(-2) + 7 =$
   $3(-32) + (16) - 4(-8) - 5(4) + 16 + 7 =$
   $-96 + 16 + 32 - 20 + 16 + 7 =$
   $71 - 116 =$
   -45

3. *$4xy - 5x^2y + 2xy^3 + 4x^3 - 5y^4 - 6$, para $x = 2$*

   $4 \cdot 2y - 5 \cdot 2^2y + 2 \cdot 2y^3 + 4 \cdot 2^3 - 5y^4 - 6 =$
   $8y - 5 \cdot 4y + 4y^3 + 4 \cdot 8 - 5y^4 - 6 =$
   $8y - 20y + 4y^3 + 32 - 5y^4 - 6 =$
   $8y - 20y + 4y^3 - 5y^4 + 26 =$

4. *$-2t^3w^4 + 3t^4w^3 - t^2w^3 - 4t^2w + 5tw + 7$, para $t = 3$, $w = 2$.*

   $-2 \cdot 3^3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 3^4 \cdot 2^3 - 3^2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 3^2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 2 + 7 =$
   $-2 \cdot 27 \cdot 16 + 3 \cdot 81 \cdot 8 - 9 \cdot 8 - 4 \cdot 9 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 2 + 7 =$
   $-864 + 1944 - 72 - 72 + 30 + 7 =$
   $1981 - 1008 =$
   973

5. $4x^3z^3 + 2x^2z^3 - 3x^2z^2 + 4xz^2 + 5xz - 3x + 4z + 3$, *para* $x = -1$, $z = 2$.

$4(-1)^3 2^3 + 2(-1)^2 2^3 - 3(-1)^2 2^2 + 4(-1)2^2 + 5(-1)2 - 3(-1) + 4 \cdot 2 + 3 =$
$4(-1) \cdot 8 + 2 \cdot 1 \cdot 8 - 3 \cdot 1 \cdot 4 + 4(-1)4 + 5(-1)2 - 3(-1) + 4 \cdot 2 + 3 =$
$-32 + 16 - 12 - 16 - 10 + 3 + 8 + 3 =$
$30 - 70 =$
-40

6. $\frac{3x^2+4x+1}{x^2-4}$, *para* $x = 2$

$\frac{3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1}{2^2 - 4}$
$\frac{3 \cdot 4 + 8 + 1}{4 - 4}$
$\frac{21}{0}$

Observe que el denominador, en este caso, se hace 0 para $x = 2$, *por lo tanto no existe un valor numérico para esta expresión algebraica cuando* $x = 2$. *En otras palabras, no siempre se puede calcular el valor numérico de una expresión algebraica.*

Ejercicios 22. *En los ejercicios del 1 al 9, halar los valores numéricos de las siguientes expresiones algebraicas para las cantidades que se indican. En los ejercicios del 10 al 18, hallar los valores numéricos para* $x = -1, 1, -2, 2, -3, 3$ *en cada una de las siguientes expresiones algebraicas,* ***siempre que sea posible****:*

1)$6w^3 + 4w^2 - 3, w = 4$ 2)$2z^4 - z^3 + 5z + 4, z = 2$ 3)$-2t^5 + 2t^3 - 8, t = -1$

4)$x^5 - 2x^3 - 5x^2 + 4, x = 1$ 5)$-2r^5 - 4r^3 + 5, r = -1$ 6)$5w^2 - 3w + 5, w = -2$

7)$x^2y^3 + x^3y - 5, \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -3 \end{array}$ 8)$3x^3y^4 - 2x^2y^2, \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 \end{array}$ 9)$\frac{4x^2y^3+4xy}{2x^2y^3-4xy^2+2xy}, \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 \end{array}$

10)$\frac{x^2-1}{-4x^2-4x}$ 11)$\frac{x^2-1}{-2x^2-2x}$ 12)$\frac{4-x^2}{x^2-2x}$

13)$\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ 14)$\frac{-x^2-5x-1}{x^2-4x+4}$ 15)$\frac{x^2+3x-1}{4x^2-5x+3}$

16)$\frac{x^2-x-5}{x^2+4x+4}$ 17)$\frac{2x^2-3x-5}{3x^2-3x}$ 18)$\frac{4x^2+4x}{2x^3+4x^2+2x}$

8. Lenguaje algebraico

El lenguaje matemático es, necesariamente, muy preciso, y esa precisión obliga al establecimiento de ciertas convenciones que en ocasiones chocan un tanto con el lenguaje natural. También es conocida por todos la conveniencia de una cierta economía a la hora de expresarse matemáticamente. Esto nos conduce necesariamente a la adopción de ciertos simbolismos con los que nos hemos de familiarizar para poder enfrentarnos con éxito al estudio de las matemáticas.

Cuando hablamos de Matemáticas nos referimos principalmente al hecho de realizar un proceso de pensamiento que implica "construir" y "aplicar" una serie de ideas abstractas relacionadas entre sí de manera lógica, y que generalmente surgen al resolver problemas en la ciencia, la tecnología y la vida cotidiana. El desarrollo de la Matemática a lo largo de su historia, ha propiciado la creación de un "lenguaje matemático" que tiene como objetivo "ser práctico" y no es su objetivo "ser estético", tal lenguaje surge por la necesidad de comunicar hechos, desarrollos y descubrimientos.

Algunos aspectos del razonamiento matemático tienen reglas lógicas claras, otros tipos de razonamiento solo poseen principios y otros (los más numerosos) tienen espacio casi ilimitado para la creatividad (y como no, para el error).

En matemáticas, para que un argumento sea convincente requiere enunciados verdaderos y relaciones válidas entre tales enunciados; la lógica formal se interesa por la validez de las relaciones entre los enunciados, no se interesa en si tales enunciados son verdaderos; sin embargo, para la matemática el análisis de la verdad de los enunciados es tan importante como la validez de las relaciones entre ellos.

Cuando hablamos de lenguaje matemático nos estamos refiriendo a dos cuestiones distintas pero interrelacionadas, por una parte nos referimos a la simbología utilizada en matemáticas y por otra, nos referimos a la estructura y presentación de los contenidos matemáticos.

Así, la matemática además de poseer sus propios conceptos como las demás ciencias, ha creado su propio alfabeto. En la vida diaria se diferencia entre letra y símbolo, aunque realmente una letra es un símbolo que representa algo (bien es repasada solo o bien unido con otros símbolos). Así, un símbolo matemático representa algo y además se puede unir con otros símbolos. La simbología matemática está repleta de caracteres gráficos ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$, $=$, $-$, $+$, $\cdot$, $/$, etc.), que son como las "palabras" de cualquier idioma.

Los símbolos matemáticos se deben conocer para poder interpretar lo que se quiere decir con ellos, al mismo tiempo que se deben utilizar para expresar lo que se quiera decir. Todos los símbolos son necesarios para la perfecta construcción de ideas, de manera que la sustitución de alguno de ellos por otro diferente, aunque sea gráficamente parecido, cambiaría totalmente el significado. Es decir, todas y cada una de las "palabras" matemáticas tienen un significado concreto, no existiendo sinónimos para las "palabras matemáticas" como ocurre en el lenguaje normal.

En este orden de ideas, exponemos algunos ejemplos donde presentamos expresiones en lenguaje natural on convencional y su representación en lenguaje matemático o algebraico específicamente. Observe que las letras empleadas en cada situación no son las mismas, esto significa que un número se puede representar con cualquier letra; sin embargo, hay letras reservadas para representar cantidades específicas, salvo que se diga lo contrario. Por ejemplo, las letras a, b, c, d, e, f representan cantidades constantes, mientras que las letras i, j, k, l, m, n se reservan para representar variables enteras ($\mathbb{Z}$) y, por otro lado, las letras w, x, y, z se reservan para representar variables continuas o reales ($\mathbb{R}$), en general.

1. El **doble** de un número o **dos veces** una cantidad cualquiera: $\mathbf{2x}$.
2. El **triple** de un número o **tres veces** una cantidad cualquiera: $\mathbf{3w}$.
3. El **cuádruple** de un número o **cuatro veces** una cantidad cualquiera: $\mathbf{4y}$.
4. En general, ***n*** **veces** una cantidad cualquiera: $\mathbf{nx}$.
5. La **mitad** de un número: $\mathbf{\frac{x}{2}}$.
6. La **tercera parte** de un número: $\mathbf{\frac{z}{3}}$.
7. La **séptima parte** de un número: $\mathbf{\frac{y}{7}}$.
8. El **quíntuple** de un número **más** 9 unidades: $\mathbf{5w + 9}$.
9. La **cuarta parte** de una cantidad **menos** 6 unidades: $\mathbf{\frac{x}{4} - 6}$.
10. La edad de Juan **dentro** de 5 años: $\mathbf{J + 5}$, donde J representa la edad **actual** de Juan.
11. La edad de Cristina **hace** 5 años: $\mathbf{C - 5}$, donde C representa la edad actual de Cristina.
12. Un número y su **sucesor**: En primer lugar, debemos tomar en cuenta que los conceptos de sucesor y antecesor de un número sólo están reservados para números enteros, por lo tanto debemos hacer uso de las letras, reservadas para este caso, tal como se dijo anteriormente. En tal sentido: $\mathbf{k}, \quad \mathbf{k + 1}$.

13. La **cuarta parte** de un número **más** su *sucesor* **es** 26: $\frac{n}{4} + (n+1) = 26$, donde **n** representa un entero arbitrario.

14. Un número y su **antecesor**: $\mathbf{m}, \quad \mathbf{m-1}$.

15. La **suma** tres números *consecutivos* **es** 102 o tres números *consecutivos* **suman** 102: $(\mathbf{k}) + (\mathbf{k+1}) + (\mathbf{k+2}) = 102$, también: $(\mathbf{k+5}) + (\mathbf{k+6}) + (\mathbf{k+7}) = 102$ o incluso: $(\mathbf{m-1}) + (\mathbf{m}) + (\mathbf{m+1}) = 102$. Aquí queremos resaltar que esta representación **no es única**.

16. Un número **par**: $\mathbf{2k}$, donde k en un número natural.

17. Un número **impar**: $\mathbf{2n+1}$ o $\mathbf{2n-1}$, donde n en un número natural.

18. La suma de tres números pares consecutivos es 210 o tres números pares consecutivos suman 210: $(\mathbf{2n}) + (\mathbf{2n+2}) + (\mathbf{2n+4}) = \mathbf{210}$, donde **n** es un número natural arbitrario.

19. La **suma** de cuatro números *impares consecutivos* es 144 o cuatro números *impares consecutivos* **suman** 144: $(\mathbf{2m+1}) + (\mathbf{2m+3}) + (\mathbf{2m+5}) + (\mathbf{2m+7}) = \mathbf{144}$, donde **m** es un número natural arbitrario.

20. Antonio **es** 7 años mayor que José: $\mathbf{A = J + 7}$ o $\mathbf{A - 7 = J}$, donde **A** y **J** son las edades de Antonio y José, respectivamente.

21. La edad de Ramón **es** el **doble** de la edad de su hijo **menos** 5 años: $R = 2h - 5$, donde **R** y **h** representan las edades de Ramón y su hijo, respectivamente.

22. Un bus tarda 4 horas menos que otro en ir de Mérida a Caracas: $\mathbf{z = x - 4}$, donde **z** y **x** representan el tiempo que tarda cada bus en ir de Mérida a Caracas.

23. Augusto, Franklin y Rubén tienen Bs 43000 entre los tres: $\mathbf{A + F + R = 43000}$, donde **A**, **F** y **R** son los montos que tienen Augusto, Franklin y rubén, respectivamente.

24. Pedro excede a Ignacio en 500$: $\mathbf{P = I + 500}$ o $\mathbf{P - 500 = I}$, donde **P** e **I** son los montos de dinero que tienen Pedro e Ignacio, respectivamente.

25. El cuadrado de un número o un número al cuadrado: $\mathbf{x^2}$, donde **x** representa un número arbitrario.

26. El cubo de un número o un número al cubo: $\mathbf{y^3}$, donde **y** representa un número arbitrario.

27. La sexta potencia de un número: $\mathbf{z^6}$, donde **z** representa un número arbitrario.

28. La octava potencia de la diferencia de dos números: $(\mathbf{x}-\mathbf{z})^{\mathbf{8}}$, donde $\mathbf{x}$ y $\mathbf{z}$ son dos números arbitrarios.

29. Dos números que se **diferencian** en 5 unidades: $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{5}$, donde $\mathbf{x}$ y $\mathbf{w}$ representan dos números arbitrarios.

30. El cubo de la suma de tres números: $(\mathbf{x}+\mathbf{w}+\mathbf{z})^{\mathbf{3}}$, donde $\mathbf{x}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{z}$ son tres números arbitrarios.

31. El cuadrado de la suma de un número y su novena parte y su triple: $(\mathbf{y}+\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{9}}+\mathbf{3y})^{\mathbf{2}}$, donde $\mathbf{y}$ representa un número arbitrario.

32. La quinta potencia de la tercera parte de la diferencia de un número y su mitad: $\left[\frac{\mathbf{x}-\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{3}}\right]^{\mathbf{5}}$, donde $\mathbf{x}$ representa un número arbitrario.

33. La tercera parte de la quinta potencia de la diferencia de un número y su mitad: $\frac{(\mathbf{z}-\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{2}})^{\mathbf{5}}}{\mathbf{3}}$, donde $\mathbf{z}$ es un números arbitrario.

34. El salario de Adriana es el triple del salario de Humberto más Bs. 1200: $\mathbf{A}=\mathbf{3H}+\mathbf{1200}$ o $\mathbf{A}-\mathbf{1200}=\mathbf{3H}$, donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{H}$ representan los salarios de Adriana y Humberto, respectivamente.

35. Un número y su opuesto: z, $-z$, donde z es un número arbitrario.

36. Un número y su inverso: x, $\frac{1}{x}$, donde x es un número arbitrario.

37. La **suma** de un número al **cuadrado** con su **consecutivo**: $\mathbf{n}^{\mathbf{2}}+[\mathbf{n}+\mathbf{1}]$, donde $\mathbf{n}$ es un número entero cualquiera.

38. La **suma** de un número con su **consecutivo** al **cuadrado**: $\mathbf{m}+[\mathbf{m}+\mathbf{1}]^{\mathbf{2}}$, donde $\mathbf{m}$ es un número entero cualquiera.

39. La suma de cuatro múltiplos de 3 consecutivos: **3k + (3k+3) + (3k+6) + (3k+9)**, donde **k** es un número entero cualquiera.

40. El 15 % de un número: $\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{100}}\mathbf{x}$ o $\mathbf{0,15x}$, donde $\mathbf{x}$ es un número arbitrario.

41. El 3 % de un número: $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{100}}\mathbf{w}$ o $\mathbf{0,03w}$, donde $\mathbf{w}$ es un número arbitrario.

42. El **ingreso**, $\mathbf{I}$, por vender $\mathbf{x}$ bolígrafos a un precio de Bs. $\mathbf{p}$: $\mathbf{I}=\mathbf{px}$.

43. El **costo**, $\mathbf{C}$, de fabricar $\mathbf{n}$ mesas al mes, sabiendo que en cada mesa se gastan en material Bs. $\mathbf{x}$ y se paga un alquiler mensual de Bs. $\mathbf{k}$: $\mathbf{C}=\mathbf{nx}+\mathbf{k}$.

44. El **beneficio**, **B**, que se obtiene por la venta de una cantidad **x** del mismo artículo que cuesta **a** Bs y se vende por **b** Bs: $\mathbf{B} = \mathbf{bx} - \mathbf{ax}$ o $\mathbf{B} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})\mathbf{x}$.

45. A **excede** a B **en** k unidades: $A - B = k$ o $A = B + k$. Otra manera de plantear el enunciado anterior es el siguiente: El **exceso** de A sobre B es k.

46. D es **excedido** por E **en** m unidades: $E - D = m$ o $E = m + D$.

47. El número cuyo **cuádruple excede** en 8 al **triple** de 10: $\mathbf{4z} = \mathbf{3}(\mathbf{10}) + \mathbf{8}$ o también $\mathbf{4z} - \mathbf{3}(\mathbf{10}) = \mathbf{8}$.

48. El número cuyo **doble excede** en 20 a su **suma** con 8: $\mathbf{2x} = (\mathbf{x} + \mathbf{8}) + \mathbf{20}$.

49. El número que **excede** a 20 **tanto como** es **excedido** por 60: $\mathbf{y} - \mathbf{20} = \mathbf{60} - \mathbf{y}$

50. El **exceso** de **6 veces** un número **sobre** 50 **equivale** al **exceso** de 80 **sobre 4 veces** el número: $\mathbf{6z} - \mathbf{50} = \mathbf{80} - \mathbf{4z}$.

51. **Faltan** para las 3 p.m. la **cuarta parte** del tiempo **transcurrido**. En primer lugar, transformamos las 3 p.m. en las 15 horas y supongamos que t es el número de horas transcurridas. Así, la representación es: $\mathbf{15} - \mathbf{t} = \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{4}}$.

Ejercicios 23. *Resuelva cada uno de los siguientes problemas. Algunos de los siguientes problemas los hemos resuelto de modo que sirvan de referencia para resolver los otros.*

1. *En una reunión hay 30 personas. Si el número de mujeres es igual al de hombres más dos, ¿cuántas mujeres y hombres hay en la reunión?*
   Sea m la cantidad de mujeres que hay en la reunión.
   Sea h la cantidad de hombres que hay en la reunión.
   Así, $m + h = 30$, esto significa que entre mujeres y hombres suman 30.
   $m = h + 2$, esto significa que el número de mujeres es igual al de hombres más dos.
   Luego,
   $$\begin{aligned}&m + h = 30, \text{ sustituyendo } m \text{ por } h + 2, \text{ tenemos}\\ &h + 2 + h = 30\\ &2h + 2 = 30\\ &2h = 30 - 2\\ &2h = 28\\ &h = \tfrac{28}{2}\\ &h = 14\end{aligned}$$
   Por otra parte,
   $$\begin{aligned}&m = 14 + 2\\ &m = 16\end{aligned}$$
   Así, en la reunión hay 16 mujeres y 14 hombres.

2. *Determinar qué número hay que sumarle a 37 para que nos de 119.*

3. *Calcular un número cuyo duplo, más 17 sea igual a 47.*
   Sea w el número que satisface la condición del problema.
   Así,
   $$2w + 17 = 47$$
   $$2w = 47 - 17$$
   $$2w = 30$$
   $$w = \frac{30}{2}$$
   $$w = 15$$
   Luego, el número que satisface la condición del problema es 15.

4. *Averigua tres números consecutivos cuya suma sea 93.*

5. *Busca dos números que su suma sea 171 y su diferencia 7.*

6. *Un padre reparte mensualmente 233 euros, entre sus cuatro hijos. José recibe 17 euros más que Pablo, éste 19 euros más que Ángel; y éste, 12 euros más que Luis. Calcula cuánto recibe cada uno.*
   Supongamos que j, p, a y l es la cantidad de dinero que reciben mensualmente José, Pablo, Ángel y Luis, respectivamente.
   Entonces,
   (1) $j + p + a + l = 233$
   (2) $j = p + 17$, José recibe 17 euros más que Pablo.
   (3) $p = a + 19$, Pablo recibe 19 euros más que Ángel.
   (4) $a = l + 12$, Ángel recibe 12 euros más que Luis.

   De (2) tenemos que $p = j - 17$,
   de (3) $a = p - 19$ y
   de (4) $l = a - 12$
   Igualando estas dos últimas ecuaciones se tiene que $l = p - 31$
   Así,
   $$j + p + a + l = 233$$
   $$(p + 17) + p + (p - 19) + (p - 31) = 233$$
   $$4p + 17 - 50 = 233$$
   $$4p = 233 + 33$$
   $$4p = 266$$
   $$p = \frac{266}{4}$$
   $$p = 66,50$$
   Luego, la cantidad de dinero que recibe Pablo, mensualmente, es $66,50$ euros. Sustituyendo en la ecuaciones correspondientes, tenemos que José, Ángel y Luis reciben, respectivamente, $83,50$ euros, $47,50$ euros y $35,50$ euros.

7. *El padre de Antonio tiene 39 años y su edad es el triple de la de su hijo menos 6 años. ¿Qué edad tiene Antonio?*
   Sea p la edad del padre de Antonio, entonces $p = 39$
   Sea A la edad de Antonio
   Luego,
   $p = 3A - 6$, el triple de la de su hijo menos 6 años
   $3A - 6 = 39$, dado que el padre tiene 39 años
   $3A = 39 + 6$
   $3A = 45$
   $A = \frac{45}{3}$
   $A = 15$
   Por lo tanto la edad de Antonio es de 15 años.

8. *¿Cuánto costó un libro, si un quinto, más un sexto, más un séptimo de su precio, menos 0,10 euros suman la mitad de su precio?*

9. *Las edades de dos hermanos suman 38 años. Si el mayor tiene ocho años más, calcula sus edades.*
   Sean w y z las edades de los hermanos, w la del menor y z la del mayor.
   Así, por un lado $w + z = 38$ y por otro, $z = w + 8$ (el mayor tiene 8 años más que el menor).
   $w + z = 38$
   $w + (w + 8) = 38$
   $2w = 38 - 8$
   $2w = 30$
   $w = \frac{30}{2}$
   $w = 15$
   Luego, el menor tiene 15 años y el mayor tiene 23 años.

10. *Calcula la edad de Andrés sabiendo que los $\frac{2}{3}$ más los $\frac{3}{4}$ de su edad son 51 años?*
    Sea A la edad de Andrés. Entonces,
    $\frac{2}{3}A + \frac{3}{4}A = 51$

    $\frac{8A+9A}{12} = 51$

    $\frac{17A}{12} = 51$

    $A = \frac{51 \cdot 12}{17}$

    $A = 36$
    Luego, Andrés tiene 36 años.

11. *Calcula qué número es preciso sumar a los dos términos de la fracción $\frac{3}{8}$ para que nos resulte otra equivalente a $\frac{3}{4}$.*

12. *Dos números se diferencian en 32 unidades: Calcularlos, sabiendo que la mitad de su suma, más los $\frac{2}{3}$ del menor, son 56.*

13. *Dos números son tales que su suma y su cociente son 96 y 7, respectivamente. Hallarlos.*

14. *En una granja de gallinas y conejos, el veterinario coloca 590 anillas en sus cabezas y 1720 en sus patas para garantizar que están sanos. ¿Cuántos animales hay de cada clase?*
    Supongamos que g representa la cantidad de gallinas y c el número de conejos. Entonces,
    $g + c = 590$, *dado que cada animal tiene una sola cabeza.*
    $g = 590 - c$
    Ya que las gallinas tienen 2 patas y los conejos 4, $2g + 4c = 1720$.
    Sustituyendo el despeje de g en esta última ecuación, tenemos,
    $$2(590 - c) + 4c = 1720$$
    $$1180 - 2c + 4c = 1720$$
    $$2c = 1720 - 1180$$
    $$2c = 540$$
    $$c = \frac{540}{2}$$
    $$c = 270$$
    Por lo tanto, hay 270 conejos. Realizando la sustitución adecuada, se tiene que hay 320 gallinas.

15. *Un padre tiene 29 años y su hija 3. Calcular cuántos años ha de transcurrir para que la edad del padre sea triple de la de su hija.*

16. *Rubén tiene 12 años más que Jaime y hace tres años tenía el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?*
    Supongamos que r y j son las edades actuales de Rubén y Jaime, respectivamente. Entonces,
    (1) $r = j + 12$, *dado que Rubén tiene 12 años más que Jaime.*
    $r - 3 = 2(j - 3)$, *hace 3 años Rubén tenía el doble de la edad de Jaime.*
    $r - 3 = 2j - 6$
    $r = 2j - 6 + 3$
    (2) $r = 2j - 3$
    Igualando las ecuaciones (1) y (2), se tiene que
    $$2j - 3 = j + 12$$
    $$2j - j = 12 + 3$$
    $$j = 15$$
    Luego, Jaime tiene 15 años y Rubén tiene 27.

17. *Repartir 151,50 € entre cuatro personas, sabiendo que la segunda recibe la mitad que la primera, la tercera un tercio de la segunda; y la cuarta, la décima parte de la tercera.*
Sean w, x, y, z el dinero que reciben la primera, segunda, tercera y cuarta persona, respectivamente.
Entonces,

(1) $$w + x + y + z = 151,50$$

(2) $$x = \frac{w}{2} \longrightarrow w = 2x$$

(3) $$y = \frac{x}{3} \longrightarrow x = 3y$$

(4) $$z = \frac{y}{10} \longrightarrow y = 10z$$

De (2) y (3), tenemos que

$$3y = \frac{w}{2}$$

(5) $$y = \frac{w}{6}$$

De (4) y (5), tenemos que

$$10z = \frac{w}{6}$$

(6) $$z = \frac{w}{60}$$

Sustituyendo (2), (5) y (6) en (1), tenemos que

$$w + \frac{w}{2} + \frac{w}{6} + \frac{w}{60} = 151,50$$

$$\frac{60w+30w+10w+w}{60} = 151,50$$

$$\frac{101w}{60} = 151,50$$

$$w = \frac{151{,}50 \cdot 60}{101}$$

$$w = \frac{9090}{101}$$

$$w = 90$$

Por lo tanto, la primera persona recibe 90€, la segunda 45€, la tercera 15€ y la cuarta $1,5$€.

18. *Una finca de forma rectangular mide 784m de perímetro. Calcula sus lados sabiendo que la base mide 104m más que la altura.*
Supongamos que b es la base y h es la altura del rectángulo.
El perímetro de un rectángulo es la suma de los cuatro lados, es decir, $P = 2b + 2h$.
(1) $2b + 2h = 784$, el perímetro mide 784.
(2) $b = h + 104$, la base mide $104m$ más que la altura
Sustituyendo (2) en (1), se sigue que
$$2(h+104) + 2h = 784$$
$$2h + 208 + 2h = 784$$
$$4h = 784 - 208$$
$$4h = 576$$
$$h = \tfrac{576}{4}$$
$$h = 144$$
Por lo tanto, la altura mide $144m$ y la base $248m$.

19. *En la fiesta de fin de curso hay doble número de madres que de padres y triple número de muchachos que de madres y padres juntos. Halla el número de madres, padres y muchachos que hay en la fiesta si el total es de 156 personas.*

20. *Vicente tiene 30 años más que su hijo Ramón. Dentro de 6 años, la edad del padre será triple que la del hijo. ¿Cuáles son sus edades actuales?*

21. *El doble de las horas del día que han transcurrido es igual al cuádruple de las que quedan por transcurrir. ¿Qué hora es?*
Sea h la hora actual. Dado que el día tiene 24 horas, resolveremos el problema tomando en cuenta que $0 \leq h \leq 24$.
Así,
$$2h = 4(24 - h)$$
$$2h = 96 - 4h$$
$$2h + 4h = 96$$
$$6h = 96$$
$$h = \tfrac{96}{6}$$
$$h = 16$$
Por lo tanto, son las 16 horas, es decir, las $4:00$pm.

22. *Mis padres han comprado una mesa, un sofá y seis sillas. La mesa ha costado el cuádruple de una silla y el sofá 60 € menos que la mesa. Si en total se han gastado 3.224 euros, ¿cuánto le costó cada cosa?*

23. *En un bosque hay triple de cedros que de robles, y el doble de estos que de caobas y un centenar de apamates. En total en el bosque hay 649 árboles, ¿cuántos hay de cada especie?*

24. *En una granja las gallinas aumentan cada año en 600 unidades, y al final del mismo se venden la mitad de las existentes. Si al final del tercer año hay 650 gallinas, ¿cuántas había al principio?*
Sea m la cantidad de gallinas al inicio del primer año.

Dado que las gallinas aumentan en 600 unidades cada año, el primer año se tienen $m + 600$. Como al final del año se venden la mitad de las existentes, el primer año quedan:

$$\frac{m+600}{2} = \frac{m}{2} + 300, \text{ con esta cantidad se inicia el segundo año.}$$

Dado que las gallinas aumentan en 600 unidades cada año, el segundo año se tienen

$$\frac{m}{2} + 300 + 600 = \frac{m}{2} + 900.$$

Como al final del año se venden la mitad de las existentes, el segundo año quedan:

$$\frac{\frac{m}{2}+900}{2} = \frac{m}{4} + 450, \text{ con esta cantidad se inicia el tercer año.}$$

Dado que las gallinas aumentan en 600 unidades cada año, el tercer año se tienen

$\frac{m}{4} + 450 + 600 = \frac{m}{4} + 1050.$

Como al final del año se venden la mitad de las existentes, el tercer año quedan:

$$\frac{\frac{m}{4}+1050}{2} = \frac{m}{8} + 525$$

$$\frac{m}{8} + 525 = 650, \text{ al final del tercer año hay650gallinas.}$$

$$\frac{m}{8} = 650 - 525$$

$$\frac{m}{8} = 125$$

$$m = 125 \cdot 8$$

$$m = 1000$$

Por lo tanto, al inicio del primer año habían 650 gallinas.

25. *Los bombones de una caja se reparten entre tres niños. Al primero se le da la mitad más dos; al segundo, la mitad del resto más dos, y al tercero la mitad de lo que quedan más dos. ¿Cuántos bombones tenía la caja?, ¿Cuántos recibió cada niño?*

26. *La compra de 15 lápices y 8 bolígrafos importa 3,8 euros. Calcular el precio de cada cosa sabiendo que un bolígrafo vale el doble que un lápiz.*

27. *Adivina cuántas monedas llevo sabiendo que la tercera parte de ellas menos una es igual a su sexta parte.*
Sea x la cantidad de monedas que llevo.
Así,
$\frac{x}{3} - 1 = \frac{x}{6}$, la tercera parte de ellas menos una es igual a su sexta parte.

$\frac{x-3}{3} = \frac{x}{6}$

$6(x-3) = 3x$

$6x - 18 = 3x$

$6x - 3x = 18$

$3x = 18$

$x = \frac{18}{3}$

$x = 6$
Por lo tanto, llevo 6 monedas.

28. *Averigua la mensualidad de un obrero, sabiendo que si a su mitad se le restan 75$. Resulta la misma cantidad que si su décima parte se multiplica por cuatro.*

29. *Un padre tiene 42 años y su hija 10, ¿cuántos años deben de pasar para que la edad del padre sea triple de la de su hija?*
Sean $p = 42$ la edad del padre y $h = 10$ la edad de la hija.
Sea x, los años que deben pasar.
$3(10 + x) = 42 + x$
$30 + 3x = 42 + x$
$3x - x = 42 - 30$
$2x = 12$
$x = \frac{12}{2}$
$x = 6$
Entonces, deben pasar 6 años para que se cumpla la condición del problema.

30. *El perímetro de un rectángulo es 168 m. Sabemos que la base es 4 m mayor que la altura. ¿Cuánto mide la base y la altura?*

31. *Durante un partido de baloncesto una de las jugadoras ha marcado la cuarta parte de los puntos de su equipo más siete. Si el resto de su equipo marcó 89 puntos, ¿cuántos puntos marcó ella?*

32. *Un día en clase faltaron 6 alumnos por la gripe, con lo cual sólo asistieron dos más de las tres cuartas partes del total de los estudiantes. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?*

33. *Luis tiene 45 años y su hijo 25 años. ¿Cuántos años hace que la edad del padre era triple de la del hijo?*
    Sean $L = 45$ la edad de Luis y $h = 25$ la edad de su hijo.
    Sea t, los años que pasaron.
    $45 - t = 3(25 - t)$
    $45 - t = 75 - 3t$
    $3t - t = 75 - 45$
    $2t = 30$
    $t = \frac{30}{2}$
    $t = 15$
    Entonces, los años que pasaron fueron 15 para que se cumpla la condición del problema.

34. *Leticia tiene 18 años y afirma que su edad es igual al doble de la edad de su hermano Pablo menos seis años. Halla la edad de Pablo.*

35. *Halla un número de dos cifras, tal que la cifra de las unidades es el triple de las decenas y si se intercambian las dos cifras el número aumenta en 54.*
    Sean mk el número de dos cifras donde m representa las decenas y k las unidades.
    Dado que mk es un número de dos cifras, se puede escribir como: $10m + k$.
    $k = 3m$, la cifra de las unidades es el triple de las decenas.
    $km = mk + 54$, si se intercambian las dos cifras el número aumenta en 54
    $10k + m = 10m + k + 54$
    $10(3m) + m = 10m + 3m + 54$
    $30m + m = 13m + 54$
    $31m - 13m = 54$
    $18m = 54m = \frac{54}{18}$
    $m = 3$
    Entonces, la cifra de las decenas es $m = 3$ y la de las unidades es $k = 9$. Es decir, el número es el 39.

36. *En una bolsa hay bolas blancas, rojas y azules. El número de bolas blancas es el doble del de rojas, y el de bolas azules es igual a la suma de las blancas y rojas más 3. Si en total hay 423 bolas halla el número de bolas de cada color.*

37. *Dentro de 10 años, María tendrá el doble de la edad que tenía hace quince años. ¿Cuál es la edad actual de María?*

38. *En cada bolsillo del pantalón tengo cierto número de fichas, en total, 24. Si paso una ficha del bolsillo derecho al izquierdo, tendría en este el doble número de fichas que en el derecho. ¿Cuántas fichas tenía en cada bolsillo?*
    Sean D el número de fichas del bolsillo derecho e I las del bolsillo izquierdo.
    $D + I = 24$, total de fichas entre ambos bolsillos.

    (1) $I = 24 - D$

    $I + 1 = 2(D - 1)$, al pasar una ficha del bolsillo derecho al izquierdo, tendría en este el doble de fichas que en el derecho.
    (2) $I + 1 = 2D - 2$

    Sustituyendo I de (1) en (2), tenemos que,
    $$24 - D + 1 = 2D - 2$$
    $$25 - D = 2D - 2$$
    $$-D - 2D = -2 - 25$$
    $$-3D = -27 \qquad (-1)$$
    $$3D = 27$$
    $$D = \frac{27}{3}$$
    $$D = 9$$
    Por lo tanto, en el bolsillo derecho tenía 9 fichas y en el izquierdo 15.

39. *Si un número lo multiplico por 4 me da lo mismo que si a dicho número le sumo 9. ¿Cuál es ese número?*
    Sea n el número que satisface la condición del problema.
    Así,
    $$4n = n + 9$$
    $$4n - n = 9$$
    $$3n = 9$$
    $$n = \frac{9}{3}$$
    $$n = 3$$
    Luego, el número es 3.

40. *Averigua dos números cuya suma sea 49 y su diferencia 13.*

41. *Busca dos números cuya suma sea 90 y su cociente 9.*

42. *Un número está compuesto de dos dígitos cuya suma es 9. Invirtiendo el orden de los dígitos resulta un número superior en 9 unidades al inicial. Hállalo.*

43. *La edad de Pedro es doble que la de Juan. Si Pedro tuviera 12 años menos y Juan 8 años más, los dos tendrían la misma edad: ¿Qué edad tienen?*

44. *Un tanque dispone de dos grifos: agua fría y agua caliente. Abriendo solamente el grifo de agua fría, el tanque se llena en 3 horas. Abriendo ambos se llena en 2 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse el tanque si se abre solamente el grifo de agua caliente?*
    Sea x la capacidad total del tanque.
    Dado que el grifo de agua fría llena el tanque en 3 horas, tenemos que en una hora se llena una tercera parte del tanque, es decir, en una hora el grifo de agua fría llena $\frac{1}{3}x$.

    Si en conjunto, ambos grifos, tardan 2 horas en llenar el tanque, entonces en una hora se llena la mitad del tanque, es decir, en una hora ambos grifos llenan $\frac{1}{2}x$.

    Para determinar cuánto llena en una hora el grifo de agua caliente, restamos a lo que tardan ambos grifos, lo que tarda el grifo de agua fría, esto es,

    $$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x.$$

    Lo anterior indica que el grifo de agua caliente llena en una hora $\frac{1}{6}x$ (una sexta parte del tanque).
    Por lo tanto, el grifo de agua caliente tarda 6 horas en llenar el tanque.

45. *El grifo de agua fría llena un tanque en 30 min, el de agua caliente en 40 min y el desagüe lo vacía en 20 min. Si abro los dos grifos y se me olvida cerrar el desagüe, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el tanque y empezar a derramarse?*
    Sea w la capacidad total del tanque.
    Dado que el grifo de agua fría llena el tanque en $30min$, tenemos que en un minuto se llena una treintava parte del tanque, es decir, en un minuto el grifo de agua fría llena $\frac{1}{30}w$.

    Como el grifo de agua caliente llena el tanque en $40min$, tenemos que en un minuto se llena una cuarentava parte del tanque, es decir, en un minuto el grifo de agua fría llena $\frac{1}{40}w$.

    Por otra parte, ya que el desagüe vacía el tanque en $20min$, tenemos que en un minuto se vacía una veinteava parte del tanque, es decir, en un minuto el desagüe vacía $\frac{1}{20}w$.

    Para determinar qué parte del tanque se llenará con ambos grifos y el desagüe abiertos en un minuto, sumamos las partes que llenan ambos grifos abiertos y le restamos la parte del tanque que se vacía por el desagüe, esto es,

    $$\frac{1}{30}w + \frac{1}{40}w - \frac{1}{20}w = \frac{4w+3w-6w}{120} = \frac{1}{120}w.$$

    En un minuto, entre ambos grifos y el desagüe, el tanque se llena $\frac{1}{120}w$ (una ciento veinteava parte del tanque).
    Por lo tanto, el tanque se llenará y comenzará a derramarse en 120 minutos.

46. *Un estanque tiene tres tubos de abastecimiento. Uno puede llenarlo en 36 horas, otro en 20 horas y un tercero en 30 horas. Halla el tiempo que tardarían en llenarlo los tres juntos.*
    Sea z la capacidad total del estanque.

    Sea A el tubo que llena el estanque en 36 horas. Así, en una hora, el tubo A llena $\frac{1}{36}z$.

    Sea B el tubo que llena el estanque en 20 horas. Así, en una hora, el tubo B llena $\frac{1}{20}z$.

    Sea C el tubo que llena el estanque en 30 horas. Así, en una hora, el tubo C llena $\frac{1}{30}z$.

    Así, los tres tubos en forma conjunta llenan en una hora:

    $$\tfrac{1}{36}z + \tfrac{1}{20}z + \tfrac{1}{30}z = \tfrac{5z+9z+6z}{180} = \tfrac{20}{180}z = \tfrac{1}{9}z.$$

    Esto significa que entre los tres tubos, llenan en una hora una novena parte del estanque.
    Por lo tanto, los tres tubos llenan el estanque en 9 horas.

47. *Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas, el gerente nos ha dicho que posee 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?*

48. *Entre David y Manuel tienen 180 cromos. La quinta parte de los cromos de David más la cuarta de los cromos de Manuel suman 41. ¿Cuántos cromos tiene cada uno?*

49. *La suma de tres números consecutivos es 144. ¿Cuáles son esos números?*

50. *La suma de dos números es 99, sabiendo que el doble del menor menos el mayor da 0. Halla los números.*
    Sean a y b los números, tales que:
    (1) $a + b = 99$, donde $a < b$
    (2) $2a - b = 0$, el doble del menor menos el mayor da 0.
    $b = 2a$
    Sustituyendo b de (2) en (1), tenemos que:
    $a + 2a = 99$

    $3a = 99$

    $a = \frac{99}{3}$

    $a = 33$
    Por lo tanto, $a = 33$ y $b = 66$.

51. *Halla dos números cuya suma sea es 100 y su diferencia es 46.*

52. *La suma de las edades de dos hermanos es 16 años. Dentro de un año, la edad del mayor será doble de la del menor ¿Qué edad tiene cada uno?*
Sean x y z las edades actuales de los hermanos, con $x < z$.
(1) $x + z = 16$, la suma de las edades es 16.
$x = 16 - z$
(2) $z + 1 = 2(x + 1)$, en un año, la edad del mayor será doble de la del menor
$z + 1 = 2x + 2$
$z = 2x + 2 - 1$
$z = 2x + 1$
Sustituyendo x de (1) en (2), se sigue que:
$z = 2(16 - z) + 1$
$z = 32 - 2z + 1$
$z + 2z = 33$
$3z = 33$
$z = \frac{33}{3}$
$z = 11$
Por lo tanto, la edad del mayor es $z = 11$ y la del menor es $w = 5$.

53. *La suma de dos números es 12 y su cociente es 3. Hállalos.*

54. *La edad de un padre es el doble de la de su hijo. Hace 10 años la edad del padre era el triple de la de su hijo. Halla sus edades.*
Sean p y h las edades actuales del padre y su hijo, respectivamente.
(1) $p = 2h$, .
$x = 16 - z$
(2) $p - 10 = 3(h - 10)$, Hace 10 años la edad del padre era el triple de la de su hijo
$p - 10 = 3h - 30$
$p = 3h - 30 + 10$
$p = 3h - 20$
Igualando p de (1) en (2), se sigue que:
$3h - 20 = 2h$
$3h - 2h = 20$
$h = 20$
Luego, el hijo tiene 20 años y el padre 40 años.

55. *Al comprar 20 Kg de café de la clase A y 7 de la clase B hemos pagado 121\$. Por un Kg de cada clase nos cobraron 8\$. ¿Cuánto cuesta un kg de A de B?*

56. *Un recipiente tiene doble cantidad de agua que otro. Si sacáramos 20 litros del más lleno y 10 litros del más vacío, ambos quedarían con la misma cantidad. ¿Cuántos litros contiene cada recipiente?*
Sean A y B los recipientes con w y z las respectivas capacidades. Supongamos además que A tiene el doble de capacidad que B. Así,
(1) $w = 2z$

Supongamos que A está más lleno que B. Si sacáramos 20 litros del más lleno y 10 litros del más vacío, ambos quedarían con la misma cantidad. Esto se escribe como:

(2)
$$w - 20 = z - 10$$
$$w = z - 10 + 20$$
$$w = z + 10$$

Igualando (1) en (2), se sigue que:
$$2z = z + 10$$
$$2z - z = 10$$
$$z = 10$$
Así, el recipiente A tiene una capacidad de 20 litros y el recipiente B de 10 litros.

57. *Entre Juan y Pedro tienen 40 fichas. Juan le dice a Pedro: Si medieras 4 fichas, los dos tendríamos la misma cantidad. ¿Cuántas fichas tiene cada uno?*

58. *Pedro tiene entre las dos manos 10 monedas. Si pasara una de la mano derecha a la mano izquierda tendría igual número de monedas en ambas manos. ¿Cuántas monedas tiene en cada mano?*

59. *Un número excede a otro en 5 y su suma es 29. Hallarlos.*

60. *La diferencia entre dos números es 8. Si se le suma 2 al mayor el resultado será tres veces el menor. Encontrar los números.*

61. *Cuáles son los números cuya suma es 58 y su diferencia 28?*

62. *La suma de dos números es 8 y si a uno de ellos se le suma 22 resulta 5 veces el otro. ¿cuáles son los números?*

63. *Encontrar dos números que difieran en 10 unidades tales que su suma sea igual a dos veces su diferencia.*

64. *La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es 121. Hallar los números.*

65. *La diferencia de dos números es 3 y la diferencia de sus cuadrados es 27. Hallar los números.*

66. *Encontrar un número tal que su **exceso** sobre 50 sea igual que su **defecto** sobre 90.*
    En primer lugar, recordemos que: el exceso de una cantidad A sobre otra cantidad B es k, significa que $A - B = k$ o $A = B + k$.
    Por otro lado, también recordemos que: el defecto de una cantidad C sobre otra cantidad D es r, significa que $C - D = r$ o $C = D + r$.

    Sea x, el número que debemos encontrar.
    (1) $x - 50 = t$, *un número x tal que su **exceso** sobre 50 sea t.*

    (2) $90 - x = t$, *un número x tal que su **defecto** sobre 90 sea t.*

    Igualando las ecuaciones (1) y (2), se sigue que:
    $$x - 50 = 90 - x$$
    $$x + x = 90 + 50$$
    $$2x = 140$$
    $$x = \frac{140}{2}$$
    $$x = 70$$
    Así, el número al cual se hace referencia en el problema es 70.

67. *Si a 288 se le suma un cierto número el resultado es igual a tres veces el exceso del número sobre 12. Encontrar el número.*
    Sea w, el número que debemos encontrar.
    $288 + w = 3(w - 12)$, *a 288 se le suma un cierto número el resultado es igual a tres veces el exceso del número sobre 12.*
    $$288 + w = 3w - 36$$
    $$w - 3w = -36 - 288$$
    $$-2w = -324 \qquad (-1)$$
    $$2w = 324$$
    $$w = \frac{324}{2}$$
    $$w = 162$$
    Así, el número al cual se hace referencia en el problema es 162.

68. *Dividir 105 en dos partes una de las cuales disminuida en 20 sea igual a la otra disminuida en 15.*

69. *Un padre es cuatro veces mayor que su hijo; en 24 años mas el tendrá el doble de la edad de su hijo. Encontrar sus edades.*

70. *Encontrar un número tal que la suma de su sexta parte y su novena parte sea 15.*

71. *Dos números difieren en 28 y uno de ellos es ocho novenos del otro, encontrarlos.*

72. *Cuál es el número cuya octava, sexta y cuarta parte suman 13.*
    Sea z, el número que debemos encontrar. Así,

$$\frac{z}{8}+\frac{z}{6}+\frac{z}{4}=13, \text{ número cuya octava, sexta y cuarta parte suman 13.}$$

$$\frac{3z+4z+6z}{24}=13$$

$$\frac{13z}{24}=13$$

$$z=\frac{13\cdot 24}{13}$$

$$z=24$$

Luego, el número que cumple con la propiedad enunciada en el problema es 24.

73. *Encontrar tres números consecutivos tales que si ellos son divididos por 10, 17 y 26 respectivamente, la suma de sus cocientes es 10.*
    Sean n, $n+1$ y $n+2$ los tres números consecutivos que cumplen con el enunciado del problema. De esta manera,

$$\frac{n}{10}+\frac{n+1}{17}+\frac{n+2}{26}=10$$

$$\frac{221n+130(n+1)+85(n+2)}{2210}=10$$

$$\frac{221n+130n+130+85n+170}{2210}=10$$

$$\frac{436n+300}{2210}=10$$

$$436n+300=22100$$

$$436n=22100-300$$

$$436n=21800$$

$$n=\frac{21800}{436}$$

$$n=50$$

Luego, los tres números consecutivos que cumplen con el enunciado del problema son 50, 51 *y* 52.

74. *Tres alumnos tienen 270 puntos. ¿cuántos puntos tiene cada uno, sabiendo que el segundo tiene tantos como el primero, menos 25 y el tercero tiene tantos como los otros dos juntos?*

75. *En un corral hay conejos y gallinas, ¿cuántos hay de cada especie sabiendo que juntos tienen 43 cabezas y 116 patas?*

76. *C tiene 38 años y B 28. ¿Dentro de cuantos años la edad de B será los $\frac{3}{4}$ de la de C?*

77. *El exceso de 8 veces un número sobre 60 equivale al exceso de 60 sobre 7 veces el número. Hallar el número.*

    Sea x, el número que debemos encontrar.

    (1) $8x - 60 = r$, 8 veces un número x tal que su exceso sobre 60 sea r.

    (2) $60 - 7x = r$, el exceso de 60 sobre 7 veces un número x es r.

    Igualando las ecuaciones (1) y (2), se sigue que:

    $8x - 60 = 60 - 7x$
    $8x + 7x = 60 + 60$
    $15x = 120$
    $x = \frac{120}{15}$
    $x = 8$

    Así, el número al cual se hace referencia en el problema es 8.

78. *El exceso de un número sobre 80 equivale al exceso de 220 sobre el doble del número. Hallar el número.*

79. *El numerador de una fracción excede al denominador en 2. Si el denominador se incrementa en 7, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Hallar la fracción.*

    Sean a y b, el numerador y denominador, respectivamente.

    (1) $a = 2 + b$, El numerador de una fracción excede al denominador en 2.

    (2) $\frac{a}{b+7} = \frac{1}{2}$, si el denominador se incrementa en 7, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$.

    $2a = b + 7$

    Sustituyendo el valor de a de (1) en (2), se sigue que:

    $2(2 + b) = b + 7$
    $4 + 2b = b + 7$
    $2b - b = 7 - 4$
    $b = 3$

    Así, el numerador vale 5 y el denominador vale 3.

80. *La suma de dos números es 506 y el triple del menor excede en 50 al mayor aumentado en 100. Hallar los números.*

81. *El hijo de Andrés tiene hoy 12 años menos que él. Dentro de 4 años, Andrés tendrá el triple de la edad de su hijo.¿Cual es la edad de Andrés y su hijo?*

82. *Antonio tiene 15 años, su hermano Roberto 13 y su padre 43. ¿Cuantos años han de transcurrir para que entre los dos hijos igualen la edad del padre?*

83. *La suma de las edades de los cuatro miembros de una familia es de 104 años. El padre es 6 años mayor que la madre, que tuvo a los dos hijos gemelos a los 27 años.¿Cuál es la edad de cada uno?*

Sean P, M, k y t, las edades del padre, de la madre y de los gemelos, respectivamente.

(1) $P + M + k + t = 104$, *las cuatro edades suman* 104.

(2) $P = M + 6$, *el padre es 6 años mayor que la madre.*

(3) $k = M - 27 \qquad t = M - 27$, *la madre tuvo gemelos a los 27 años.*

Sustituyendo el valor de P de (2), k y t de (3) en (1), se sigue que:

$$M + 6 + M + (M - 27) + (M - 27) = 104$$
$$M + 6 + M + M - 27 + M - 27 = 104$$
$$4M + 6 - 54 = 104$$
$$4M = 104 + 54 - 6$$
$$4M = 152$$
$$M = \frac{152}{4}$$
$$M = 38$$

Por lo tanto, la madre tiene 38 *años, el padre* 44 *años y cada gemelo tiene* 11 *años.*

84. *Dividir 200 en dos partes tales que dividiendo la primera por 16 y la segunda por 10, la diferencia de sus cocientes sea 6.*

85. *Calcula el valor de dos números sabiendo que suman 51 y que si al primero lo divides entre 3 y al segundo entre 6, los cocientes se diferencian en 1.*

86. *Hallar dos números consecutivos tales que los $\frac{4}{5}$ del mayor equivalgan al menor disminuido en 4.*

87. *La suma de dos números es 59, y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el resto 5. Hallar los números.*

88. *Hallar el número que disminuido en sus $\frac{3}{8}$ equivale a su doble disminuido en 11.*
Sea x, el número que debemos encontrar.

(1) $x - \frac{3}{8}x = m$, el número x que disminuido en **sus** $\frac{3}{8}$ sea m.

(2) $2x - 11 = m$, el doble de x disminuido en 11 es m.

Igualando las ecuaciones (1) y (2), se tiene que:

$$x - \frac{3}{8}x = 2x - 11$$

$$\frac{8x-3x}{8} = 2x - 11$$

$$\frac{5x}{8} = 2x - 11$$

$$\frac{5x}{8} - 2x = -11$$

$$\frac{5x-16x}{8} = -11$$

$$\frac{-11x}{8} = -11 \qquad (-1)$$

$$\frac{11x}{8} = 11$$

$$x = \frac{11 \cdot 8}{11}$$

$$x = 8$$

Así, el número al cual se hace referencia en el problema es 8.

89. *Mi padrino tiene 80 años y me contó el otro día que entre nietas y nietos suman 8 y que si les diese 100 monedas a cada nieta y 50 a cada nieto se gastaría 650 monedas. ¿Cuántos nietos y nietas tiene mi padrino?*

90. *Sabemos que mi tío tiene 27 años más que su hijo y que dentro de 12 años le doblará la edad. ¿Cuántos años tiene cada uno?*

91. *Entre A y B tienen 99$. La parte de B excede al triple de la de A en 19. Hallar ambas cantidades.*

92. *Una varilla de 74 metros de longitud se ha pintado de azul y blanco. La parte pintada de azul excede en 14 metros al duplo de la parte pintada de blanco. Encuentre la longitud de la parte pintada de cada color.*

93. *Mi papá le dijo a mi hermana. "Hoy tu sueldo diario es $\frac{1}{5}$ del mío y hace 7 años no era más que $\frac{1}{7}$". ¿Cuales son los salarios actuales mi padre y mi hermana?*
Sean p y h los salarios actuales de mi padre y mi hermana, respectivamente.

(1) $h = \frac{1}{5}p$, hoy el salario de mi hermana es $\frac{1}{5}$ del de mi papá.

(2) $h - 7 = \frac{1}{7}(p-7)$, hace 7 años era un $\frac{1}{7}$ del salario de mi papá.

$$h = \frac{1}{7}(p-7) + 7$$

De las ecuaciones (1) y (2), se tiene que:

$$\frac{1}{5}p = \frac{1}{7}(p-7) + 7$$

$$\frac{1}{5}p = \frac{1}{7}p - 1 + 7$$

$$\frac{1}{5}p = \frac{1}{7}p + 6$$

$$\frac{1}{5}p - \frac{1}{7}p = 6$$

$$\frac{7p-5p}{35} = 6$$

$$\frac{2p}{35} = 6$$

$$p = \frac{6 \cdot 35}{2}$$

$$p = 105$$

Así, los salarios actuales de mi padre y mi hermana son 105 y 21, respectivamente.

94. *Repartir 152 canicas entre A, B y C de modo que B tenga 8 menos que el duplo de A y 32 más que C.*

95. *El exceso de un número sobre 80 equivale al exceso de 220 sobre el duplo del número, ¿cuál es el número?*

96. *Si me pagaran los 60$ que me deben tendría el doble de lo que tengo ahora más 10$. ¿Cuánto tengo?*

97. *Un obrero ha trabajado durante 30 días para dos patrones ganando 2070 €. El primero le pagaba 65 € diarios y el segundo 80 €. ¿Cuantos días trabajó para cada patrón?*

98. *La edad de un padre es el triple de la edad de su hijo. La edad que tenía el padre hace 5 años era el doble de la edad que tendrá su hijo dentro de 10 años. Determinar las edades actuales de ambos.*
Sean p y h las edades actuales del padre y su hijo, respectivamente.

(1) $p = 3h$, la edad del padre es el triple de la de su hijo.

(2) $p - 5 = 2(h + 10)$, la edad que tenía el padre hace 5 años era el doble de la edad que tendrá su hijo dentro de 10 años.
$p = 2(h + 10) + 5$

De las ecuaciones (1) y (2), se tiene que:

$$3h = 2(h + 10) + 5$$
$$3h = 2h + 20 + 5$$
$$3h - 2h = 25$$
$$h = 25$$

Así, las edades actuales del padre y su hijo son 75 y 25, respectivamente.

99. *La suma de dos números es 85 y el número menor aumentado en 36 equivale al doble del mayor disminuido en 20. Calcular los números.*

100. *El número de días que ha trabajado Pedro es 4 veces el número de días que ha trabajado Enrique. Si Pedro hubiera trabajado 15 días menos y Enrique 21 más, ambos habrían trabajado igual número de días. ¿Cuántos días trabajó cada uno?*