Contenido Orientativo
Matemáticas 21 EE-EA-EC, Libre Escolaridad
FACES-ULA

El siguiente documento tiene como objetivo proporcionar a los alumnos del curso de matemáticas 21, por la modalidad de libre escolaridad, un marco de referencia para las evaluaciones. Es importante aclarar que, estos no serán los problemas a evaluar, es solo una guía de los tipos de problemas que podrían salir en los exámenes.

1.- **Calcular la derivada de las siguientes funciones**:

$f(x) = x$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3$
$f(x) = x - 5$	$f(x) = x + \frac{2}{3}$	$f(x) = -x - 8$
$f(x) = x^2 + 7$	$f(x) = x^2 - 1$	$f(x) = -x^2 - 4$
$f(x) = x^3 - 9$	$f(x) = -x^3 + 5$	$f(x) = x^3 - x$
$f(x) = x^3 - x^2 + 2$	$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$	$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 5x + 3$

$f(x) = (2x+1)(-3x+5)$	$g(x) = \frac{2x+1}{-3x+5}$
$h(x) = \frac{\frac{5}{3}x-2}{7x+\frac{1}{8}}$	$f(x) = \frac{10}{x^2-7}$
$g(x) = 6(-4x + \frac{1}{3})$	$h(x) = -2(5x - \frac{5}{6})$
$f(x) = \frac{4}{-3x+5}$	$g(x) = \frac{7x-\frac{2}{9}}{5}$
$h(x) = \frac{-3}{\frac{2}{3}x-5}$	$f(x) = \frac{-\frac{2}{15}x+\frac{2}{9}}{-3}$

$g(x) = \frac{x^2+7x+10}{x-3}$

$h(x) = -\frac{-x+2}{x^2-7x+12}$

$f(x) = \sqrt{(2x+1)(-3x+5)}$

$g(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{-3x+5}}$

$h(x) = \sqrt{\frac{\frac{5}{3}x-2}{7x+\frac{1}{8}}}$

$f(x) = \sqrt{\frac{10}{x^2-7}}$

$g(x) = \sqrt{6(-4x+\frac{1}{3})}$

$h(x) = \sqrt{-2(5x-\frac{5}{6})}$

$f(x) = \sqrt{\frac{4}{-3x+5}}$

$g(x) = \sqrt{\frac{7x-\frac{2}{9}}{5}}$

$h(x) = \sqrt{\frac{-3}{\frac{2}{3}x-5}}$

$f(x) = \sqrt{\frac{-\frac{2}{15}x+\frac{2}{9}}{-3}}$

$g(x) = \sqrt{\frac{x^2+7x+10}{x-3}}$

$h(x) = \sqrt{-\frac{-x+2}{x^2-7x+12}}$

$f(x) = \ln((2x+1)(-3x+5))$

$g(x) = \ln(\frac{2x+1}{-3x+5})$

$h(x) = \ln(\frac{\frac{5}{3}x-2}{7x+\frac{1}{8}})$

$f(x) = \ln(\frac{10}{x^2-7})$

$g(x) = \ln(6(-4x+\frac{1}{3}))$

$h(x) = \ln(-2(5x-\frac{5}{6}))$

$f(x) = \ln(\frac{4}{-3x+5})$

$g(x) = \ln(\frac{7x-\frac{2}{9}}{5})$

$h(x) = \ln(\frac{-3}{\frac{2}{3}x-5})$

$f(x) = \ln(\frac{-\frac{2}{15}x+\frac{2}{9}}{-3})$

$g(x) = \ln(\frac{x^2+7x+10}{x-3})$

$h(x) = \ln(-\frac{-x+2}{x^2-7x+12})$

$f(x) = e^{-3x+5}$

$g(x) = e^{(\frac{2x+1}{-3x+5})}$

$$h(x) = e^{\left(\frac{\frac{5}{3}x-2}{7x+\frac{1}{8}}\right)} \qquad f(x) = e^{\left(\frac{10}{x^2-7}\right)}$$

$$g(x) = e^{\sqrt{-4x+\frac{1}{3}}} \qquad h(x) = e^{\sqrt{-2(5x-\frac{5}{6})}}$$

$$f(x) = e^{\sqrt{\frac{4}{-3x+5}}} \qquad g(x) = e^{\sqrt{\frac{7x-\frac{2}{9}}{5}}}$$

$$h(x) = e^{\sqrt{\frac{-3}{\frac{2}{3}x-5}}} \qquad f(x) = e^{\sqrt{\frac{-\frac{2}{15}x+\frac{2}{9}}{-3}}}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2+7x+10}}{\ln(x-3)} \qquad h(x) = -\frac{\ln(-x+2)}{\sqrt{x^2-7x+12}}$$

2.- **Resuelva los siguientes problemas de aplicación de la derivada**:

1. Si $C = 0{,}3q^2 + 2q + 850$ es una función de costo, ¿qué tan rápido está cambiando el costo cuando $q = 100$?
2. El costo de producción de una mercancía es $C(x) = 2x^3 - 6x + 1$. Hallar el costo marginal.
3. La función de ingreso de una empresa es $R(x) = 2x + 4\sqrt{x}$. Hallar el ingreso marginal.
4. Dada la ecuación de demanda siguiente: $p = 15e^{-0{,}001q}$, encuentre la razón de cambio del precio p respecto a la cantidad q. ¿Cuál es la razón de cambio cuando $q = 500$?
5. Para una empresa, la producción diaria q para el día t de un ciclo de producción está dada por
$$q(t) = 500(1 - e^{-0{,}2t})$$
Encuentre la razón de cambio de la producción q respecto a t en el décimo día.
6. La función de costo total está dada por
$$C(q) = 25\ln(q+1) + 12$$
Encuentre el costo marginal cuando $q = 6$.

7. La función de costo total para un fabricante está dada por

$$C(q) = \frac{6q^2 + 4}{\sqrt{q^2 + 8}} + 2000,$$

donde C está en dólares. Calcule el costo marginal cuando se producen 12 unidades. Interprete este resultado.

8. Si $p = \frac{q+14}{q+4}$ es una ecuación de demanda, encuentre la razón de cambio de p respecto a q. Calcule el ingreso marginal. Interprete el ingreso marginal cuando se venden 16 unidades.

9. Calcule los costos marginales de las funciones de costo siguientes:

   a) $C(x) = \sqrt{100 + x^2}$
   b) $C(x) = 20 + 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

10. Si la ecuación de demanda es $10p + x + 0,01x^2 = 700$, calcule el ingreso marginal cuando $p = 10$.

11. Si la ecuación de demanda es $p + 0,1x = 80$ y la función de costo es $C(x) = 5000 + 20x$

   a) Calcule la utilidad marginal.
   b) ¿Si se producen y venden 150 artículos, de cuánto es la utilidad marginal?
   c) ¿Si se producen y venden 400 artículos, de cuánto es la utilidad marginal?

12. El precio p por unidad de una mercancía y la cantidad x de mercancía demandada satisface la relación $p = 180 - 2x$. Si la función de costo es $C(x) = 80x + 50$, calcular:

   a) El costo marginal.
   b) El ingreso marginal.
   c) La utilidad marginal.

13. Una industria determina que su costo de producción es $C(x) = 35x + 2500$, y que su ecuación de demanda es $x + 60p = 2400$. Calcular:

   a) El costo marginal.
   b) El ingreso marginal.
   c) La utilidad marginal.

14. El costo total (en dólares) de producir x licuadoras es $C(x) = 5000 + 60x - 0,4x^2$.

   a) Hallar la función de costo marginal.

   b) Aproximar el costo de producir la licuadora 26.

   c) Hallar el costo exacto de producir la licuadora 26.

15. La ecuación de demanda de cierto bien es $p = 300 - \sqrt[3]{x}$.

   a) Determinar la función de ingreso.

   b) Calcular la función de ingreso marginal.

   c) Aproximar el ingreso al vender el bien 24.

   d) Calcular el ingreso exacto al vender el bien 24.

16. La gerencia de una editorial sabe que vende 3000 ejemplares de un texto de Cálculo si el precio es de $15; y que vende 2900 ejemplares si el precio es de $18. El costo de producir cada ejemplar es de $ 10 y tiene costos fijos de $4000. Si la ecuación de demanda es lineal, calcular:

   a) La función de utilidad.

   b) La función de utilidad marginal.

   c) El precio que hace la utilidad marginal igual a cero.

   d) La utilidad cuando el precio es el hallado en el ítem (*c*).

   e) La utilidad cuando el precio es $ 16.

   f) La utilidad cuando el precio es $ 20.

17. La función de costo total de una empresa es $C(x) = \frac{8x^2}{\sqrt{x^2+11}} + 4000$.

   a) Calcular la función de costo marginal.

   b) Calcular el costo marginal cuando $x = 5$ y dé su interpretación.

18. La función de utilidad, en miles de BsF, de una empresa es $U(x) = 640\sqrt{\frac{x^2+9}{3x+4}} - 960$.

   a) Calcular la función de utilidad marginal.

   b) Calcula la función de utilidad marginal cuando $x = 4$.

19. Un fabricante de queso sabe que cuando el Kg. es de p dólares, la demanda de su producto es $x = D(p) = \frac{54000}{p^2}$ Kg. por semana. Dentro de t semanas, el precio de un Kg. de queso será $p = 0,01t^2 + 0,2t + 3$ dólares. Calcular la razón de cambio de la demanda respecto al tiempo, dentro de 10 semanas.

3.- **Problemas de optimización**:

1. El costo de producir x unidades de un producto de limpieza es $C(x) = 3x^2 + 15x + 800$.
   a) Calcular el costo marginal.
   b) Calcular el costo promedio.
   c) ¿A qué nivel el costo promedio es mínimo?
   d) Comprobar que cuando el costo promedio es mínimo, el costo marginal coincide con el costo promedio.
2. La ecuación de demanda de un bien de consumo masivo es $2p = 3600 - 120x + x^2$, donde p es el precio en dólares y $0 < x < 30$. Calcular:
   a) La función de ingreso.
   b) El ingreso marginal.
   c) El nivel de producción en el cual el ingreso es máximo.
3. La ecuación de demanda de cierto repuesto para vehículo es $p = 250 - x$. El costo fijo para producir este repuesto es de \$4000 y el costo por unidad es de \$30. Calcular:
   a) La función de ingreso.
   b) La función de costo.
   c) La función de utilidad.
   d) El nivel de producción para maximizar la utilidad.
   e) ¿Cuál es esta utilidad?
4. El costo de producir cierto artículo es $C(x) = \frac{x^2}{2} + 10x + 500$ dólares. Si la ecuación de demanda es $p = 650 - \frac{3}{2}x$. ¿A qué nivel la ganancia es máxima? ¿Cuál es esta ganancia máxima?

5. En los siguientes problemas se da el precio $p(q)$ al cual se pueden vender q unidades de cierto artículo y el costo total $C(q)$ de producir las q unidades. En cada caso:

   a) Halle la función de Utilidad $U(q)$, el ingreso marginal $R'(q)$ y el costo marginal $C'(q)$. Trace las gráficas de $U(q)$, $R'(q)$ y $C'(q)$ en el mismo eje de coordenadas y determine el nivel de producción q donde se maximiza $U(q)$.

   b) Determine el Costo medio $A(q)$ y dibuje las gráficas de $A(q)$ y el costo marginal $C'(q)$ en el mismo eje de coordenadas. Calcule el nivel de producción q donde se minimiza $A(q)$.

   - $p(q) = 37 - 2q$; $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$
   - $p(q) = 180 - 2q$; $C(q) = q^3 + 5q + 162$
   - $p(q) = 1,0625 - 0,0025q$; $C(q) = \frac{q^2+1}{q+3}$

4.- **Derivadas en dos o más variables**:

Calcule las primeras derivadas parciales de:

$$f(x,y) = 2xy^5 + 3x^2y + x^2 \qquad z = 5x^2y + 2xy^3 + 3y^2$$

$$z = (3x+2y)^5 \qquad f(x,y) = (x + xy + y)^3$$

$$f(s,t) = \frac{3t}{2s} \qquad z = \frac{t^2}{s^3}$$

$$z = xe^{xy} \qquad f(x,y) = xye^{\frac{y}{x}}$$

$$f(x,y) = \frac{e^{2-x}}{y^3} \qquad f(x,y) = yxe^{2x-y}$$

$$f(x,y) = \frac{2x+3y}{y-x} \qquad z = \frac{xy^2}{x^2y^3+1}$$

$$z = uv\ln(v-u) \qquad f(u,v) = \frac{u}{v}\ln(uv-1)$$

$$f(x,y) = \frac{\ln(x+2y)}{y^2-x} \qquad z = \ln\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

Calcule las segundas derivadas parciales (incluidas las parciales cruzadas):

$f(x,y) = 5x^4y^3 + 2xy$

$f(x,y) = \frac{x+1}{y-1}$

$f(x,y) = e^{x^2y}$

$f(u,v) = \ln(u^2+v^2)$

$f(s,t) = \sqrt{s^2+t^2}$

$f(x,y) = x^2ye^x$

5.- **Aplicaciones de la deriva en la Economía**:

1. Para las funciones de costos conjuntos en los problemas (*a*)-(*c*), encuentre el costo marginal indicado al nivel de producción dado:

   a) $C(x,y) = 4x + 0,3y^2 + 2y + 500$; $\frac{\partial C}{\partial y}(20,30)$

   b) $C(x,y) = x\sqrt{x+y} + 1000$; $\frac{\partial C}{\partial x}(40,60)$

   c) $C(x,y) = 0,03(x+y)^3 - 0,6(x+y)^2 + 4,5(x+y) + 7700$; $\frac{\partial C}{\partial x}(50,50)$

2. En los problemas (*a*)-(*c*) q_A y q_B son funciones de demanda para los bienes A y B, respectivamente. En cada caso encuentre $\frac{\partial q_A}{\partial p_A}$, $\frac{\partial q_A}{\partial p_B}$, $\frac{\partial q_B}{\partial p_A}$ y $\frac{\partial q_B}{\partial p_B}$ y determine si A y B son competitivos, complementarios o ni uno ni otro.

   a) $q_A = 1000 - 50p_A + 2p_B$; $\quad q_B = 500 + 4p_A - 20p_B$

   b) $q_A = 20 - p_A - 2p_B$; $\quad q_B = 50 - 2p_A - 3p_B$

   c) $q_A = \frac{100}{p_A\sqrt{p_B}}$; $\quad q_B = \frac{500}{p_B\sqrt[3]{p_A}}$

3. Las ecuaciones de demanda para los bienes relacionados A y B están dadas por:

$$q_A = \frac{30\sqrt{p_B}}{\sqrt[3]{p_A^2}} \qquad \text{y} \qquad q_B = \frac{50p_A}{\sqrt[3]{p_B}}$$

   donde q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y de B y p_A y p_B los precios correspondientes (en dólares) por unidad.

   a) Encuentre los valores de las dos demandas marginales para el bien A cuando $p_A = 8$ y $p_B = 64$.

   b) Si p_B se reduce de 64 a 60, con p_A fijo en 8, use la parte (*a*) para estimar el cambio correspondiente en la demanda para el bien A.

4. La función de costos conjuntos para producir q_A unidades del bien A y q_B unidades del bien B está dada por

$$C(q_A, q_B) = \frac{q_A^2\sqrt{q_B^3 + q_A}}{17} + q_A\sqrt[3]{q_B} + 600,$$

donde C está expresada en dólares.

   a) Encuente las funciones de costo marginal respecto a q_A y q_B.
   b) Evalúe la función de costo marginal con respecto a q_A cuando $q_A = 17$ y $q_B = 8$.
   c) Use la respuesta de la parte (*b*) para estimar el cambio en el costo si la producción del bien A disminuye de 17 a 16 unidades, mientras que la producción del bien B se mantiene en 8 unidades.

5. Para las siguientes funciones de producción $P(L, K)$, determine las productividades marginales para los valores dado de L y K:

   a) $P(L, K) = 18L - 5L^2 + 3LK + 7K - K^2$; $\quad L = 4, \quad K = 8.$
   b) $P(L, K) = 25L + 2L^2 - 3L^3 + 5LK^2 - 7L^2K + 2K^2 - K^3$; $\quad L = 3, \quad K = 10.$
   c) $P(L, K) = 100L^{0,3}K^{0,7}$; $\quad L = 10, \quad K = 15.$
   d) $P(L, K) = 250L^{0,6}K^{0,4}$; $\quad L = 5, \quad K = 7.$

6. La función de producción de una empresa está dada por

$$P(L, K) = 450L^{3/5}K^{2/5}$$

en donde P representa la producción cuando se emplean L unidades de mano de obra y K unidades de capital.

   a) Determine la producción de la empresa si $L = 243$ y $K = 32$.
   b) Aproxime el efecto de incrementar la mano de obra a 248 unidades y disminuir el capital a 31 unidades.

6.- **Optimización sin restricciones**:

Calcule los puntos críticos de cada función y clasifíquelos como máximos relativos, mínimos relativos o puntos de silla:

$f(x,y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$

$f(x,y) = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y - 12x - 4$

$f(x,y) = (x-1)^2 + y^3 - 3y^2 - 9y + 5$

$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$

$f(x,y) = -x^4 - 32x + y^3 - 12y + 7$

$f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$

$f(x,y) = x^3 - 4xy + y^3$

$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2+4}$

$f(x,y) = xye^{-\left(\frac{16x^2+9y^2}{288}\right)}$

$f(x,y) = x\ln\left(\frac{y^2}{x}\right) + 3x - xy^2$

1. Un almacén de camisetas deportivas vende dos marcas que se compiten entre sí: una es patrocinada por Michael Jordan y la otra por Shaq O'neal. El propietario del almacén puede obtener ambos tipos de camisetas a un costo de \$2 por camiseta y estima que si las camisetas de Jordan se venden a x dólares la unidad y las de O'neal a y, los consumidores comprarán aproximadamente $40 - 50x + 40y$ camisetas de Jordan y $20 + 60x - 70y$ de O'neal cada día. ¿Qué precio debería fijar el propietario del almacén a las camisetas para generar la máxima utilidad posible?

2. Un fabricante planea vender un nuevo producto a \$150 la unidad y estima que si se invierten x miles de dólares en desarrollo y y miles de dólares en promoción, los consumidores comprarán aproximadamente $\frac{320y}{y+2} + \frac{160x}{x+4}$ unidades del producto. Si los costos de producción de este producto ascienden a \$50 por unidad, ¿cuánto debería invertir el fabricante en desarrollo y cuánto en promoción para generar la máxima utilidad posible de la venta de este producto? [Ayuda: Utilidad = (número de unidades)(precio por unidad - costo por unidad) - cantidad total invertida en desarrollo y promoción].

3. Un fabricante que posee derechos exclusivos sobre una nueva maquinaria industrial planea vender una cantidad limitada de las máquinas tanto a empresas nacionales como extranjeras. El precio que el fabricante espera fijar a las máquinas dependerá del número de máquinas disponibles. (Por ejemplo, si sólo unas cuantas máquinas se ponen en el mercado, las ofertas de los compradores potenciales que compiten entre sí tenderán a subir el precio). Se calcula que si el fabricante suministra x máquinas al mercado nacional y y máquinas al mercado extranjero, éstas se venderán a $60 - \frac{x}{5} + \frac{y}{20}$ lies de dólares en el mercado local y a $50 - \frac{y}{10} + \frac{x}{20}$ miles de dólares en el exterior. Si el fabricante pude producir las máquinas a un costo de \$10.000 cada una, ¿cuántas máquinas debería enviar a cada mercado para generar la mayor utilidad posible?

4. Para los productos A y B, la función de costos conjuntos es

$$C(q_A, q_B) = 1,5q_A^2 + 4,5q_B^2$$

y las funciones de demanda son: $p_A = 36 - q_A^2$ y $p_B = 30 - q_B^2$. Encuentre el nivel de producción que maximiza la utilidad.

5. Un detallista ha determinado que el número de televisores que puede vender por semana es

$$\frac{4x}{5+x} + \frac{2y}{10+y},$$

donde x y y representan sus gastos semanales (en dólares) por publicidad en periódicos y radio. La utilidad es de \$125 por aparato vendido menos el costo de la publicidad, de modo que su utilidad semanal U está dada por la fórmula

$$U = 125\left[\frac{4x}{5+x} + \frac{2y}{10+y}\right] - x - y.$$

Encuentre los valores de x y de y para los cuales la utilidad es un máximo relativo. Use la prueba de la segunda derivada para verificar que su respuesta corresponde a una utilidad máxima relativa.

7.- **Optimización con restricciones**:

Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar el extremo indicado.

1. Halle el valor máximo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $xy = 1$.

2. Halle el valor mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ sujeta a la restricción $2x + y = 22$.

3. Halle los valores máximos y mínimos de la función $f(x, y) = 8x^2 + y^2 + 24xy$ sujeta a la restricción $8x^2 + y^2 = 1$.

4. Halle los valores máximos y mínimos de la función $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

5. Halle los valores máximos y mínimos de la función $f(x, y) = e^{xy}$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 4$

6. Halle el valor máximo de la función $f(x, y) = \ln(xy^2)$ sujeta a la restricción $2x^2 + 3y^2 = 8$, para $x > 0$ y $y > 0$.

Más problemas para aplicar el método de multiplicadores de Lagrange.

1. Para sustituir una orden de 100 unidades de su producto, una empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas, la planta A y la planta B. La función de costo total está dada por
$$C(q_A, q_B) = 0,1q_A^2 + 7q_A + 15q_B + 1000,$$
donde q_A y q_B son los números de unidades producidas en las plantas A y B, respectivamente. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos? (Suponga que el punto crítico obtenido corresponde al costo mínimo).

2. Repita el problema anterior si la función de costo es
$$C(q_A, q_B) = 3q_A^2 + q_A q_B + 2q_B^2$$
y van a producirse un total de 200 unidades.

3. La función de producción de una empresa es $f(L,K) = 12L + 20K - L^2 - 2K^2$, donde el costo de L y K es de 4 y 8 por unidad, respectivamente. Si la empresa quiere que el costo total de insumos sea 88, encuentre la producción máxima posible sujeta a este control presupuestario. (Suponga que el punto crítico obtenido corresponde a una producción máxima).

4. Cuando se invierten L unidades de trabajo y K unidades capital, la producción total q de un fabricante está dada por la función de Cobb-Douglas de producción $q = 5L^{\frac{1}{5}}K^{\frac{4}{5}}$. Cada unidad de trabajo cuesta \$11 y cada unidad de capital cuesta \$33. Si se van a gastar exactamente \$11.880 en la producción, determine las unidades de trabajo y de capital que deben invertirse para maximizar la producción.